# Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

# XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

## 2009–2010 учебный год

## Первый день

## 19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

### Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6–7 | Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение. |
| 5–6 | Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| 3–4 | В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей. |
| 2–3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0–1 | Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения. |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

*Желаем успешной работы!*

*Авторы и составители сборника*





# 9 класс

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня. *(Н. Агаханов)*

**Решение.** Предположим противное; тогда дискриминанты всех трёхчленов неположительны, то есть $a_k^2 \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Левые (а значит, и правые) части этих неравенств неотрицательны, поэтому их можно перемножить, получая $(a_1a_2a_3)^2 \leqslant b_1b_2b_3$, то есть $N^2 \leqslant N$, где $N = a_1a_2a_3$. Но это противоречит неравенству $N > 1$.

**Комментарий.** Начато рассуждение от противного и получены неравенства $a_k^2 \leqslant b_k$ — 1 балл. При перемножении неравенств не обоснована законность такого перемножения — ставить не более 5 баллов.

9.2. Семь лыжников с номерами $1, 2, \ldots, 7$ ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов. *(С. Волчёнков)*

**Ответ.** Заметим, что чётность места каждого лыжника менялась при любом обгоне; значит, его место на финише — той же чётности, что и на старте.

**Решение.** Так как скорости постоянны, каждые два лыжника встречались не более одного раза. Будем обозначать лыжников их стартовыми номерами.

Победителя никто не мог обогнать, значит, он сам обогнал двоих. Поэтому он — 3, и обогнал лыжников 1 и 2. Аналогично, финишировавший последним не мог никого обогнать, поэтому его обогнали двое, он — 5, и его обогнали 6 и 7. Далее, лыжник 1 не мог никого обогнать, то есть он финишировал третьим (и его, кроме 3, обогнал лыжник, финишировавший вторым), а лыжника 7 никто не мог обогнать, и он финишировал пятым (обогнав 5 и лыжника, финишировавшего шестым).

Итак, осталось выяснить, какими финишировали лыжники с чётными номерами. Вторым финишировать мог либо 2, либо 4. Если 2 пришел вторым, то он обогнал 1, и с группой лидеров $(1, 2, 3)$ больше обгонов не происходило. Значит, лыжника 4 могли только обгонять, он на финише шестой, а лыжник 6 — четвёртый.

Если же вторым пришел 4, то 2 мог придти к финишу только четвёртым (значит, 4 обогнал 2 и 1), а шестым пришел 6 (обогнав 5 и уступив 7). Итого, возможны только два протокола: $3, 2, 1, 6, 7, 4, 5$ и $3, 4, 1, 2, 7, 6, 5$.

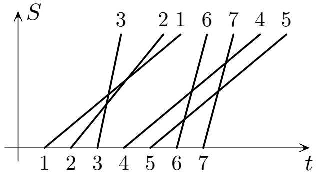

Рис. 1

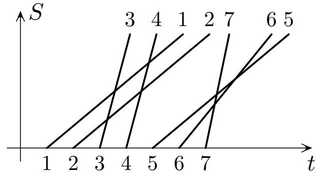

Рис. 2

**Замечание.** Оба этих случая возможны (но в задаче не требуется доказывать это); соответствующие графики движения приведены на рисунках 1 и 2.

**Комментарий.** Приведён один из двух возможных протоколов — 0 баллов. Верно предъявлены оба возможных протокола без обоснования отсутствия других — 1 балл. В доказательстве, основанном на переборе случаев, не разобран один случай, принципиально отличающийся от разобранных — ставить не более 2 баллов.

9.3. Можно ли при каком-то натуральном $k$ разбить все натуральные числа от 1 до $k$ на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа? *(Н. Агаханов)*

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим противное. Ясно, что $k \geqslant 10$, так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим





наибольшую степень десятки $10^n$, не превосходящую $k$. Последовательность цифр числа $10^n$ целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и $n$ последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от $10^n$. Но наименьшее число, отличное от $10^n$ и содержащее такой набор цифр, — это $10^{n+1}$. Мы получили противоречие с тем, что $10^n$ — максимальная степень десятки, не превосходящая $k$.

**Комментарий.** Предъявлен только верный ответ (без доказательства) — 0 баллов. Присутствует идея рассматривать самую длинную последовательность нулей — 4 балла.

9.4. В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60°$. Пусть $BB_1$ и $CC_1$ — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине $A$ относительно прямой $B_1C_1$, лежит на стороне $BC$. *(Д. Прокопенко)*

**Решение.** Пусть $I$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Тогда $\angle B_1IC_1 = \angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - (\angle ABC + \angle ACB)/2 = 180° - 60° = 120° = 180° - \angle B_1AC_1$. Значит, четырёхугольник $AB_1IC_1$ вписан в окружность. Отсюда $\angle AC_1B_1 = \angle AIB_1 = \angle ABI + \angle BAI = (\angle A + \angle B)/2$ (поскольку $\angle AIB_1$ — внешний в $\triangle ABI$), и аналогично $\angle AB_1C_1 = (\angle A + \angle C)/2$.

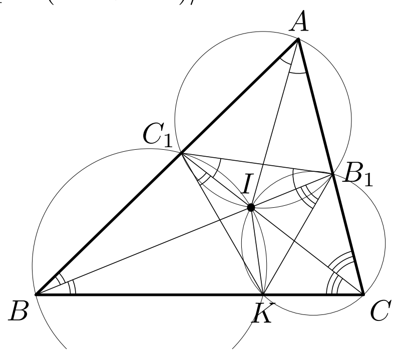

Рис. 3

Пусть описанная окружность треугольника $BC_1I$ пересекает прямую $BC$ в точке $K$ (легко понять, что эта точка не может попасть на продолжение стороны $BC$). Тогда $\angle IKC = 180^\circ - \angle BKI = \angle BC_1I = 180^\circ - \angle AC_1I = \angle AB_1I = 180^\circ - \angle IB_1C$, то есть четырёхугольник $IB_1CK$ также вписан.

Наконец, поскольку четырёхугольники $AB_1IC_1$, $BC_1IK$ и $CKIB_1$ вписаны, мы имеем $\angle KC_1B_1 = \angle KC_1I + \angle IC_1B_1 = \angle KBI + \angle IAB_1 = (\angle B + \angle A)/2 = \angle AC_1B_1$, и аналогично $\angle KB_1C_1 = \angle KB_1I + \angle IB_1C_1 = (\angle C + \angle A)/2 = \angle AB_1C_1$. Значит, треугольники $AB_1C_1$ и $KB_1C_1$ равны по стороне $B_1C_1$ и двум прилежащим к ней углам. Тогда они симметричны относительно $B_1C_1$, а тогда и точки $A$ и $K$ также симметричны. Поскольку точка $K$ лежит на $BC$, решение закончено.

**Комментарий.** Доказано, что точки $A$, $B_1$, $I$ и $C_1$ лежат на одной окружности — 1 балл.

# 10 класс

10.1. Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырёх обгонах? (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) *(С. Волчёнков, И. Богданов)*

**Ответ.** Не могло.

**Решение.** Предположим, что это возможно. Так как скорости постоянны, каждые два лыжника встречались не более одного раза. Тогда лыжник, стартовавший первым, не мог никого обогнать; значит, его обогнали четверо, и он пришел пятым. С другой стороны, лыжника, стартовавшего последним, никто не мог обогнать, поэтому он сам обогнал четверых и также пришел пятым. Противоречие.

**Замечание.** Аналогичное рассуждение показывает, что и первым, и последним в гонке мог прийти только лыжник номер 5.

**Комментарий.** Показано, что стартовавший первым (либо стартовавший последним) пришел на финиш пятым — 3 балла. Показано, что стартовавший пятым пришел первым (последним) — 3 балла.





10.2. Можно ли при каком-то натуральном $k$ разбить все натуральные числа от 1 до $k$ на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа? *(Н. Агаханов)*

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим противное. Ясно, что $k \geqslant 10$, так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим наибольшую степень десятки $10^n$, не превосходящую $k$. Последовательность цифр числа $10^n$ целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и $n$ последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от $10^n$. Но наименьшее число, отличное от $10^n$ и содержащее такой набор цифр, — это $10^{n+1}$. Мы получили противоречие с тем, что $10^n$ — максимальная степень десятки, не превосходящая $k$.

**Комментарий.** Предъявлен только верный ответ (без доказательства) — 0 баллов. Присутствует идея рассматривать самую длинную последовательность нулей — 4 балла.

10.3. В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AD$, $BE$ и $CF$, пересекающиеся в точке $I$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает прямые $BE$ и $CF$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $I$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности. *(Д. Прокопенко)*

**Решение.** Для решения задачи достаточно установить, что $\angle MAI = \angle MNI$ (см. рис. 4). Пусть $K$ — середина отрезка $AD$. Заметим, что $\angle MNI = \angle KNI = 90^\circ - \angle KIN = 90^\circ - (\angle ACI + \angle CAI) = \frac{1}{2}(180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)) = \frac{1}{2}\angle ABC$.

Остаётся установить, что $\angle MAI = \frac{1}{2}\angle ABC$. Пусть $M'$ — точка пересечения окружности, описанной около треугольника $ABD$, с серединным перпендикуляром к отрезку $AD$ (точка $M'$ лежит на дуге $\overset{\frown}{AD}$, не содержащей точку $B$). Тогда $AM' = DM'$, $\overset{\frown}{AM'} = \overset{\frown}{DM'}$, а значит, и $\angle M'BD = \angle M'BA$, как опирающиеся на равные дуги. Это означает, что точка $M'$ лежит на биссектрисе угла $ABC$ и, следовательно, $M'$ совпадает с $M$.

Итак, точки $A$, $M$, $D$ и $B$ лежат на одной окружности, откуда $\angle MAI = \angle MBD = \frac{1}{2}\angle ABC$, что и требовалось.

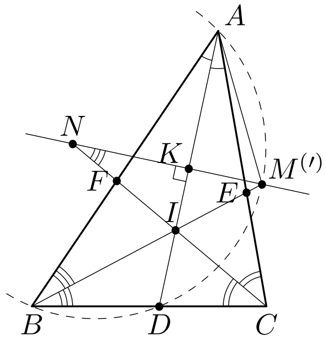

Рис. 4

**Комментарий.** Доказано только одно из равенств $\angle MNI = \angle ACB/2$ или $\angle NMI = \angle ABC/2$, либо доказано, что точки $B$, $C$, $M$, $N$ лежат на одной окружности — 1 балл. Доказано только равенство $\angle MAI = \angle ABC/2$ (или аналогичные ему), либо доказано, что точки $A$, $M$, $D$ и $B$ (или $A$, $N$, $D$ и $C$) лежат на одной окружности — 3 балла.

10.4. Натуральное число $b$ назовём *удачным*, если для любого натурального $a$ такого, что $a^5$ делится на $b^2$, число $a^2$ делится на $b$. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010. (*П. Кожевников*)

**Ответ.** 1961.

**Решение.** Установим следующее описание удачных чисел.

**Лемма.** *Число $b$ является удачным тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение $b$ на простые множители с одним из следующих показателей:* 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8.

**Доказательство.** Назовем целое неотрицательное число $k$ *счастливым*, если не существует такого целого $m$, что $2m < k \leqslant \frac{5}{2}m$. Заметим, что счастливыми являются в точности числа 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8. Действительно, при $k \leqslant 8$ в этом можно убедиться прямой проверкой. Если же $k \geqslant 9$, то выберем максимальное





число $m$ такое, что $2m < k$. Тогда $m \geqslant 4$, и $\frac{5}{2}m \geqslant 2m+2 = 2(m+1) \geqslant k$ по выбору $m$, то есть $k$ несчастливо. Осталось показать, что $b$ удачно тогда и только тогда, когда каждое простое число входит в разложение $b$ со счастливым показателем.

Пусть число $b$ неудачно, то есть $a^5 \vdots b^2$, $a^2 \not\vdots\, b$ для некоторого $a$. Тогда некоторое простое $p$ входит в разложение $a^2$ в меньшей степени, чем в разложение $b$. Пусть $p$ входит в разложения $a$ и $b$ в степенях $m$ и $k$ соответственно; тогда $2m < k$, но $\frac{5}{2}m \geqslant k$, так как $a^5 \vdots b^2$. Значит, число $k$ — несчастливое.

Итак, если все степени вхождения простых чисел в $b$ счастливы, то $b$ удачно. В противном же случае, если $b = p^k b'$, где $b'$ не делится на $p$ и $k$ несчастливо ($2m < k \leqslant \frac{5}{2}m$), то при $a = p^m b'$ число $a^5$ делится на $b^2$, а $a^2$ не делится на $b$, и $b$ неудачно. Лемма доказана. $\square$

Подсчитаем теперь количество неудачных натуральных чисел, меньших 2010. Согласно лемме, надо подсчитать количество чисел, имеющих простой делитель, входящий в разложение на простые множители с показателем 5, 7, 9 или более 9. Поскольку $2^{10} < 2010 < 2^{11}$, $3^6 < 2010 < 3^7$, $2^5 \cdot 3^5 > 2010$ и $5^5 > 2010$, каждое неудачное число, меньшее 2010, принадлежит к одному из следующих непересекающихся классов:

1) числа вида $2^5 q$, где $q$ — нечётное и $q \leqslant 61$ (поскольку $2^5 \cdot 61 < 2010 < 2^5 \cdot 63$);

2) числа вида $2^7 q$, где $q$ — нечётное и $q \leqslant 15$ (поскольку $2^7 \cdot 15 < 2010 < 2^7 \cdot 17$);

3) числа вида $2^9 q$, где $q = 1$ или $q = 3$ (поскольку $q$ нечетно, и $2^9 \cdot 3 < 2010 < 2^9 \cdot 5$);

4) число $2^{10}$;

5) числа вида $3^5 q$, где $q$ не делится на 3 и $q \leqslant 8$ (поскольку $3^5 \cdot 8 < 2010 < 3^5 \cdot 10$).

Итого мы получаем ровно 31 число из класса 1, ровно 8 чисел из класса 2, ровно 2 числа из класса 3, ровно одно число из класса 4 и ровно 6 чисел из класса 5. Таким образом, общее количество неудачных чисел, меньших 2010, равно

$31+8+2+1+6=48$. Тогда количество удачных чисел равно $2009-48=1961$.

**Комментарий.** Получено неверное описание удачных чисел (например, получено, что удачные числа — это те, для которых каждое простое число входит в разложение на простые множители с показателем 0, 1, 2, 3 или 4) — 0 баллов.

Верное решение складывается из следующих продвижений:

а) Правильно сформулировано, но не обосновано верное описание удачных чисел — 3 балла.

б) Доказано, что любое простое число входит в разложение каждого удачного числа с показателем 0, 1, 2, 3, 4, 6 или 8 — 1 балл.

в) Доказано, что число, в разложение которого любое простое число входит с показателем 0, 1, 2, 3, 4, 6 или 8, является удачным — 1 балл.

г) Верно проведен подсчет неудачных чисел, меньших 2010 — 2 балла.

Баллы за пункты а) — г) суммируются (сумма баллов равна 7).

# 11 класс

11.1. Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили на единицу. Могла ли его гипотенуза увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$?

*(С. Волчёнков)*

**Ответ.** Не могла.

**Решение. Первое решение.** Пусть длины катетов исходного прямоугольного треугольника были равны $x$ и $y$. Тогда его гипотенуза имела длину $\sqrt{x^2+y^2}$, а после увеличения катетов стала $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$. Предположим, что гипотенуза увеличится более, чем на $\sqrt{2}$. Тогда

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2} \iff$$

$$\iff (x+1)^2+(y+1)^2 > x^2+y^2+2+2\sqrt{2(x^2+y^2)} \iff$$





$$\iff 2x+2y > 2\sqrt{2(x^2+y^2)} \iff (x+y)^2 > 2(x^2+y^2) \iff$$

$$\iff 2xy > x^2+y^2 \iff 0 > (x-y)^2,$$

что невозможно. Значит, гипотенуза не могла увеличиться более, чем на $\sqrt{2}$.

**Второе решение.** Расположим исходный и полученный треугольники $ABC$ и $AB'C'$ так, как показано на рис. 5 ($BB'=CC'=1$). Тогда $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'})$. Однако сумма двух перпендикулярных единичных векторов $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}$ имеет длину $\sqrt{2}$; значит, $|\overrightarrow{B'C'}| \leqslant |\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}|=|\overrightarrow{BC}|+\sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

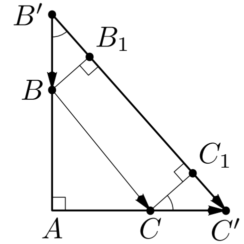


Рис. 5

**Третье решение.** Расположим треугольники так же, как в предыдущем решении. Пусть $B_1$, $C_1$ — проекции точек $B$ и $C$ на $B'C'$, а $\angle AB'C'=\alpha$. Тогда отрезок $B_1C_1$ является проекцией $BC$ и потому $B_1C_1 \leqslant BC$. Далее, $B'B_1=BB'\cos\alpha=\cos\alpha$, $C'C_1=CC'\sin\alpha=\sin\alpha$, и $B'C'=B'B_1+B_1C_1+C_1C' \leqslant BC+\cos\alpha+\sin\alpha=BC+\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha) \leqslant BC+\sqrt{2}$, что и требовалось.

**Комментарий.** Только ответ без обоснования, с неверным обоснованием или с рассмотрением только нескольких частных случаев — 0 баллов.

11.2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны. *(Д. Храмцов)*

**Решение.** Ясно, что веса всех гирь, стоящих на нечётных местах, имеют одинаковую чётность, а веса всех остальных гирь — другую чётность. Так как общий вес чётен, то 1005 гирь на нечётных местах имеют чётные веса.

Поставим первую гирьку на левую чашку весов (пусть ее вес равен $2a \leqslant 1000$ г), остальные 2008 гирь разобьём на 1004 пары стоящих рядом гирек (тогда веса гирек в любой паре отличаются на 1 г). Теперь в некоторых $(502 - a)$ парах поставим более лёгкие гири каждой пары на правую чашку весов, а более тяжёлые — на левую; в остальных же $(502+a)$ парах поставим лёгкие гири на левую чашку, а тяжёлые — на правую. Тогда разность суммарных весов гирь на левой и правой чашках будет равна $2a + (502 - a) - (502 + a) = 0$, что и требовалось.

**Комментарий.** Присутствует идея разбиения всех гирь, кроме одной, на пары соседних и раскладывания гирь из одной пары на разные чаши — 2 балла.

11.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром $AC$. Точки $K$ и $M$ — проекции вершин $A$ и $C$ соответственно на прямую $BD$. Через точку $K$ проведена прямая, параллельная $BC$ и пересекающая $AC$ в точке $P$. Докажите, что угол $KPM$ — прямой. *(Т. Емельянова)*

**Решение. Первое решение.** Обозначим через $E$ точку пе-

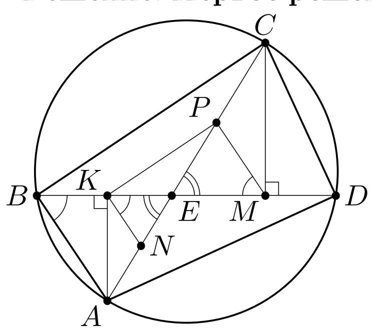


Рис. 6

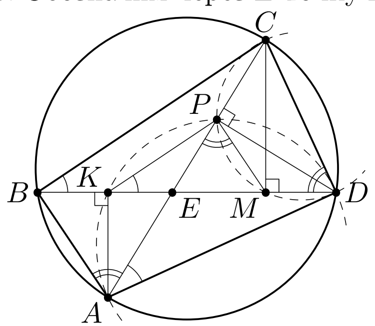


Рис. 7

ресечения диагоналей $AC$ и $BD$. Пусть для определенности точка $K$ лежит на отрезке $BE$. Пусть прямая, проходящая через $K$ параллельно $PM$, пересекает $AC$ в точке $N$ (см. рис. 6). Тогда $\triangle NKE \sim \triangle PME$ (так как их стороны параллельны), откуда $\frac{PE}{EM} = \frac{NE}{EK}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники $AKE$ и $CME$ также подобны (по острому углу при вершине $E$), поэтому $\frac{EM}{EC} = \frac{EK}{EA}$. Перемножая полученные равенства, получаем $\frac{PE}{EC} = \frac{NE}{EA}$. Но по теореме Фалеса $\frac{PE}{EC} = \frac{KE}{EB}$. Итого, мы получили $\frac{NE}{EA} = \frac{PE}{EC} = \frac{KE}{EB}$, откуда $KN \parallel AB$. Значит, и $PM \parallel AB \perp BC \parallel KP$, что и требовалось.





Случай, когда точка $K$ лежит на отрезке $DE$, рассматривается аналогично.

**Второе решение.** Опять обозначим через $E$ точку пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ и рассмотрим случай, когда точка $K$ лежит на отрезке $BE$. Заметим, что $\angle PAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle PKD$, то есть четырёхугольник $AKPD$ вписан (см. рис. 7). Значит, $\angle AKD = \angle APD = 90^\circ$. Тогда из равенства $\angle CPD = \angle CMD = 90^\circ$ следует вписанность четырёхугольника $CPMD$, откуда $\angle EPM = 180^\circ - \angle CPM = \angle EDC = \angle BAC = \angle BAE$. Отсюда следует, что $PM \parallel AB \perp BC \parallel KP$, что и требовалось.

Случай, когда $K$ лежит на отрезке $DE$, опять же рассматривается аналогично.

11.4. Назовем тройку натуральных чисел $(a, b, c)$ *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число $b$ взаимно просто с каждым из чисел $a$ и $c$, а число $abc$ является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число. *(В. Сендеров)*

**Решение.** Если $b = 1$, то $a = c = 1$, и в качестве другой тройки можно выбрать $(1, 25, 49)$. Если же $b \neq 1$, то из взаимной простоты разность прогрессии $d$ не может оказаться нулевой. Тогда без ограничения общности $d = b - a = c - b > 0$.

Поскольку $b$ взаимно просто как с $a$, так и с $c$, то оно взаимно просто с $ac$. Далее, произведение взаимно простых чисел $ac$ и $b$ является квадратом, поэтому и каждое из них — также квадрат, то есть $b = f^2$, $ac = m^2 = (b - d)(b + d) = b^2 - d^2$ для некоторых натуральных $f$ и $m$. При этом $m \neq d$, так как в противном случае $b^2 = m^2 + d^2 = 2m^2$, что невозможно.

Рассмотрим теперь тройку $(b - m, b, b + m)$. Ее члены образуют арифметическую прогрессию, являются натуральными числами (так как $b^2 - m^2 = d^2 > 0$), и их произведение

$(b-m)b(b+m) = f^2(b^2-m^2) = (df)^2$ является квадратом. Кроме того, НОД$(b, m^2) =$ НОД$(b, ac) = 1$, откуда $1 =$ НОД$(b, m) =$ $=$ НОД$(b, b-m) =$ НОД$(b, b+m)$. Значит, эта тройка — квадратная, она имеет общий элемент $b$ с исходной и отлична от нее (ибо $b-m \neq b-d$), что и требовалось.

**Комментарий.** Решение в целом верно, но упущен случай тройки $(1, 1, 1)$ — снять 1 балл. Для каждой тройки предъявлена другая, имеющая с ней ровно одно общее число, но не проверено, что эти тройки различны — ставить 4 балла.