Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Второй день

19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

9 класс

9.5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку. (*Р. Женодаров*)

Решение. Запишем каждую из наших разностей со знаком плюс, если в соответствующей паре чисел большее стоит перед меньшим по часовой стрелке, и со знаком минус в противном случае. У нас получились 11 разностей между числом и следующим за ним по часовой стрелке; значит, сумма всех этих чисел равна нулю, то есть чётному числу. Это невозможно, поскольку среди них ровно семь нечётных чисел — четыре числа вида ± 1 и три числа вида ± 3.

Комментарий. Любое решение, основанное на переборе случаев, в котором не разобран хотя бы один случай, принципиально отличающийся от разобранных, оценивается не более, чем в 1 балл.

9.6. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$. (*Л. Емельянов*)

Решение. Поскольку $\angle PC_1B = \angle PA_1B = 90^\circ$, четырёхугольник PA_1C_1B вписан. Значит, $\angle CC_1A_1 = 180^\circ - \angle A_1C_1B = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle A_1BP$. С другой стороны, $\angle A_1BP = \angle ACB = \frac{1}{2}\smile AB$. Поэтому $\angle CC_1A_1 = \angle A_1PB = 90^\circ - \angle ACC_1$, то есть прямые A_1C_1 и AC пересекаются под прямым углом.

Комментарий. Доказано, что точки P, A_1, B и C_1 лежат на одной окружности — 1 балл.

9.7. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. (*С. Волчёнков*)

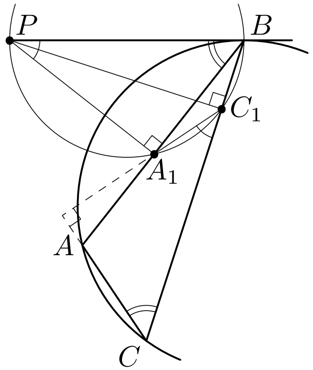


Рис. 1

Решение. Заметим, что у каждого в компании не менее трёх знакомых. Действительно, если бы некто X был знаком менее, чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы шестёрку людей, в которой у X не более одного знакомого, т. е. посадить их за круглый стол невозможно. Более того, если бы у каждого было ровно по три знакомых, то число пар знакомых людей было бы равно $7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$, что невозможно.

Значит, у какого-то человека X хотя бы 4 знакомых. Рассадим всех, кроме X, за круглый стол. Тогда из четырёх его знакомых хотя бы двое сидят рядом. Если мы посадим X между ними, то получим требуемую рассадку.

Комментарий. Любое решение, основанное на переборе случаев, в котором не разобран хотя бы один случай, принципиально отличающийся от разобранных, оценивается не более, чем в 1 балл.

9.8. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2$, $S_2 = 2+3 = 5$, $S_3 = 2+3+5 = 10$, $\ldots$. Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел? *(В. Шарич)*

Ответ. Не могут.

Решение. Обозначим n-е простое число через p_n. Предположим, что нашлось $m > 1$, для которого $S_{m-1} = k^2$, $S_m = \ell^2$, где k и ℓ — натуральные числа. Числа $S_2 = 5$, $S_3 = 10$ квадратами не являются, так что $m > 4$. Заметим, что $p_m = S_m - S_{m-1} = (\ell - k)(\ell + k)$; ввиду простоты p_m получаем $1 = \ell - k$, $p_m = \ell + k = 2\ell - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1$. Таким образом, $S_m = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$.

Заметим, что p_m нечётно (так как $m \geqslant 2$), и $1+3+5+\ldots+p_m = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \ldots + \left(\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$. С другой стороны, в сумму $S_m = 2 + p_2 + \ldots + p_m$, кроме двойки, входят лишь нечётные числа, и при $m > 4$ не входят нечётное составное число 9 и число 1, поэтому $S_m \leqslant (1 + 3 + 5 + \ldots + p_m) + 2 - 1 - 9 < \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$. Противоречие.

Замечание. В последовательности (S_n) встречаются квадраты натуральных чисел. Кроме $S_9 = 100$, известны еще несколько; минимальный из них — это $S_{2474} = 25633969 = 5063^2$.

Комментарий. В предположении, что S_{m-1} и S_m — точные квадраты, получено, что $S_m = \left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$ — 2 балла.

10 класс

10.5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2+bx+c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x. *(М. Мурашкин)*

Решение. Так как для всех x верно неравенство $P(x) = ax^2 + (b-c)x + c > 0$, то дискриминант трёхчлена $P(x)$ отрицателен: $D = (b-c)^2 - 4ac = b^2 + c^2 - 2bc - 4ac < 0$. Кроме того, $c = P(0) > 0$. Значит, у трехчлена $Q(x) = cx^2 - (b+c)x + (a+b)$ положителен старший коэффициент, а его дискриминант $D' = (b+c)^2 - 4c(a+b) = b^2 + c^2 + 2bc - 4ac - 4bc = D$ отрицателен. Это значит, что $Q(x) > 0$ при всех действительных x, что и требовалось доказать.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $Q(x) = (1-x)^2 P\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Комментарий. Если в решении присутствует только доказательство отрицательности дискриминанта D' (но не проверяется, что старший коэффициент $Q(x)$ положителен) — 4 балла. Доказано только, что $c > 0$ — 2 балла.

10.6. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

(Л. Емельянов)

Решение. Треугольники PBA и PCB подобны, так как $\angle BPC$ — общий, а $\angle PBA = \angle PCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Значит, $\frac{BA}{BC} = \frac{PB}{PC}$. Аналогично, из подобия треугольников PDA и PCD следует, что $\frac{DA}{DC} = \frac{PD}{PC}$. Так как $PB = PD$, то $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$, или $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$; заметим, что тогда и $\frac{AB+CB}{AD+CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$.

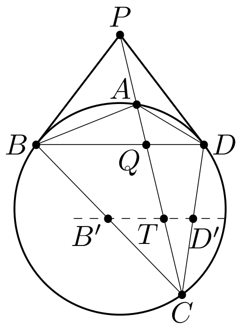


Рис. 2

Обозначим через Q точку пересечения отрезков AC и BD, а через T — произвольную точку на отрезке AC. Пусть для определенности T лежит на отрезке QC, а прямая, проходящая через T параллельно BD, пересекает CB и CD в точках B' и D', соответственно. Тогда по теореме Фалеса $\frac{CB'}{CD'} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB+CB}{AD+CD}$, или $\frac{CB'}{AB+CB} = \frac{CD'}{AD+CD}$, что и требовалось.

Если же точка T лежит на отрезке AQ, то аналогично рассматриваются отрезки, высекаемые на сторонах AB и AD.

Комментарий. Доказано равенство $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ (или эквивалентное соотношение) — 2 балла.

10.7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

(В. Сендеров)

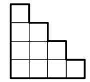
Ответ. Существуют.

Решение. Для натурального числа t тройка чисел $3t$, $-t$, $-2t$ удовлетворяет всем условиям, кроме, возможно, последнего. А чтобы сумма $(3t)^{13} + (-t)^{13} + (-2t)^{13} = t^{13}(3^{13} - 1 - 2^{13})$ являлась точным квадратом, достаточно положить, например, $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$.

Итак, условию задачи удовлетворяет, например, тройка чисел $3t$, $-t$, $-2t$, где $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$.

Комментарий. Только верный ответ (без предъявления конструкции) — 0 баллов. Имеется идея поиска решения в виде (ta, tb, tc), где a, b, c — фиксированные числа с нулевой суммой — 2 балла.

10.8. Назовём *лестницей высоты* n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали (на рисунке показана лестница высоты 4). Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны? *(Д. Храмцов)*



Ответ. 2^{n-1}.

Решение. Отметим в каждом столбце лестницы по одной верхней клетке; назовём их объединение *верхним слоем*. Никакие две из n клеток этого слоя не могут лежать в одном прямоугольнике разбиения, поэтому в любом разбиении лестницы не менее n прямоугольников. С другой стороны, минимальная суммарная площадь n прямоугольников с различными площадями равна $1 + 2 + \ldots + n$, что совпадает с площадью всей лестницы. Значит, число прямоугольников в любом разбиении равно n, их площади выражаются числами $1, 2, \ldots, n$, и каждый из них содержит клетку верхнего слоя.

Покажем индукцией по n, что число требуемых разбиений лестницы высоты n равно 2^{n-1}. База индукции при $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение индукции справедливо для лестницы высоты $n-1$; рассмотрим разрезание лестницы высоты n на прямоугольники площадей $1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим прямоугольник, покрывающий угловую (наиболее далекую от верхнего слоя) клетку лестницы. Он содержит клетку верхнего слоя, то есть сумма длин его сторон a и b равна $n + 1$. Поэтому его площадь $S = ab \geqslant a+b-1 = n$, так как $(a-1)(b-1) = ab-(a+b-1) \geqslant 0$; при этом равенство может достигаться лишь при $a = 1$ или $b = 1$. Поскольку площади прямоугольников разбиения не превосходят n, то $S = n$, и одна из сторон нашего прямоугольника равна 1, а другая — n. Такой прямоугольник можно выбрать двумя способами (вертикальный или горизонтальный), причем в обоих случаях после его отрезания остается лестница высоты $n-1$, количество способов разрезать которую на оставшиеся прямоугольники площадей $1, 2, \ldots, n-1$ равно 2^{n-2} по предположению индукции. Значит, искомое количество способов равно $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$, что и требовалось.

Комментарий. Предъявлен только верный ответ — 0 баллов.

Верное решение складывается из следующих продвижений.

а) Предъявлен верный ответ с предъявлением (возможно, по индукции) 2^{n-1} разбиений — 1 балл.

б) Показано, что число прямоугольников в разбиении не меньше n — 2 балла.

в) Показано, что число прямоугольников в разбиении не больше n, а в случае, когда их ровно n, их площади должны равняться $1, 2, \ldots, n$ — 1 балл.

г) Показано, что в разбиении имеется прямоугольник $1 \times n$ (покрывающий угловую клетку) — 3 балла.

Баллы за пункты а)–г) суммируются (сумма баллов равна 7).

11 класс

11.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный. *(И. Богданов)*

Решение. Предположим противное; пусть для определённости $\gamma \geqslant 90^\circ$. Тогда $\alpha + \beta \leqslant 90^\circ$, и углы α и β острые. Поэтому $0 < \beta \leqslant 90^\circ - \alpha < 90^\circ$, откуда $\cos\beta \geqslant \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, что противоречит условию.

Комментарий. Могут встретиться работы, в которых участник использует монотонность тригонометрической функции на интервале, на котором она на самом деле немонотонна (например, функции $\sin x$ на интервале $(0^\circ, 180^\circ)$ или $\cos x$ на $(-90^\circ, 90^\circ)$). Такие решения оцениваются в 0 баллов.

11.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$. *(Д. Терёшин)*

Решение. Пусть X — точка пересечения луча SO с плос-

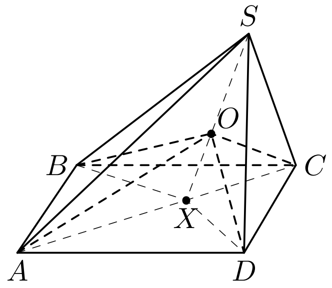


Рис. 3

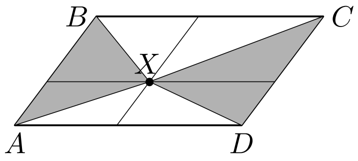


Рис. 4

костью $ABCD$ (см. рис. 3). Так как точка O лежит внутри пирамиды, то точка X лежит внутри ее основания. При этом $S_{XAB} + S_{XCD} = S_{XBC} + S_{XDA}$ (одно из возможных доказательств этого факта усматривается из рис. 4 — каждая из сумм равна половине площади параллелограмма $ABCD$). Следовательно,

$$V_{XSAB} + V_{XSCD} = V_{XSBC} + V_{XSDA}, \qquad (1)$$

так как высота этих пирамид, опущенная из вершины S, общая. Аналогично,

$$V_{XOAB} + V_{XOCD} = V_{XOBC} + V_{XODA}. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем требуемое.

Комментарий. Разобран только случай, когда точка O лежит на основании — 3 балла.

11.7. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009? *(П. Козлов)*

Ответ. Не может.

Решение. Первое решение. Подставляя $x = 1234$ в оба трёхчлена и приравнивая их, получаем $1234^2 \cdot b + 1234 \cdot c + a = 1234^2 \cdot c + 1234 \cdot a + b$, или, после переноса всех членов в левую часть, $(1234^2 - 1)b + (1234 - 1234^2)c + (1 - 1234)a = 0$. Разделив последнее равенство на 1233, имеем $1235b-1234c-a=0$, то есть $a=1235b-1234c$. Тогда значение первого трёхчлена в точке 1 равно $a+b+c=1236b-1233c=3(412b-411c)$, то есть делится на 3; значит, оно не может равняться 2009.

Второе решение. Рассмотрим многочлен $P(x)=(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)$ — его степень не больше 2. По условию, $P(1234)=0$; кроме того, очевидно, $P(1)=0$. Значит, если его степень равна 2, то по теореме Безу $P(x)=(b-c)(x-1)(x-1234)$. Если же степень меньше 2, то он может быть только нулевым (поскольку у него есть два корня); тогда $a=b=c$, и всё равно верно равенство $P(x)=(b-c)(x-1)(x-1234)$. Приравнивая свободные члены в равенстве

$$P(x)=(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=(b-c)(x-1)(x-1234),$$

получаем $a-b=1234(b-c)$, откуда $a=1235b-1234c$. Дальше решение можно завершить так же, как и предыдущее.

Комментарий. Только ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Получено соотношение $a=1235b-1234c$ — ставить 2 балла.

11.8. В клетки квадрата 100×100 расставили числа 1, 2, ..., 10000, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

(*И. Богданов*)

Ответ. $50\sqrt{2}$.

Решение. Пронумеруем в квадрате строки (снизу вверх) и столбцы (слева направо) числами от 1 до 100; будем обозначать клетку парой номеров ее строки и столбца. Назовем *расстоянием* между клетками расстояние между их центрами. Клетки назовем *парными*, если числа в них различаются на 5000.

Заметим, что расстояние от клетки $(50,50)$ до любой другой (в частности, до парной ей) не превосходит $\sqrt{50^2+50^2}=50\sqrt{2}$. Значит, и минимальное расстояние между парными клетками

также не превосходит $50\sqrt{2}$. Осталось привести пример, когда этот минимум достигается.

Разобьем наш квадрат на четыре квадрата 50×50. Расставим числа 1–2500 согласно правилам в левом нижнем квадрате так, чтобы число 1 стояло в клетке $(1,1)$, а число 2500 — в клетке $(50,1)$ (это возможно; например, первые 50 чисел в первом столбце, вторые — во втором и т. д.). Далее, если число $a\in[1,2500]$ стоит в клетке (i,k), то поставим числа $a+2500$, $a+5000$ и $a+7500$ соответственно в клетки $(k+50,i)$, $(k+50,i+50)$ и $(51-i,101-k)$. Нетрудно видеть, что при этом числа по-прежнему расставлены согласно правилам (для соседних чисел в одном квадрате это очевидно; для чисел 2500–2501, 5000–5001 и 7500–7501 проверяется непосредственно).

Осталось проверить, что расстояния между парными клетками не меньше $50\sqrt{2}$. Рассмотрим отрезок между любыми парными клетками. Сумма его горизонтальной и вертикальной проекций равна либо $(50+k-i)+(50+i-k)=100$, либо $(k+50-51+i)+(101-k-i)=100$, то есть она всегда равна 100. Значит, квадрат длины этого отрезка равен $x^2+(100-x)^2=2(x-50)^2+5000\geqslant5000=(50\sqrt{2})^2$, что и требовалось.

64	57	56	49	48	47	46	45
63	58	55	50	41	42	43	44
62	59	54	51	40	39	38	37
61	60	53	52	33	34	35	36
4	5	12	13	32	31	30	29
3	6	11	14	25	26	27	28
2	7	10	15	24	23	22	21
1	8	9	16	17	18	19	20

Рис. 5

На рис. 5 приведен пример аналогичной расстановки в квадрате 8×8.

Замечание. Предъявленный пример не единственен.

Точно так же строится пример в любом квадрате $4n\times4n$. В квадрате $(4n+2)\times(4n+2)$ подобная расстановка тоже возможна.

Комментарий. Доказано только, что $S\leqslant50\sqrt{2}$ — ставить 2 балла.