Материалы для проведения муниципального этапа

XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ В МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

2017–2018 учебный год

2 декабря 2017 г.

Долгопрудный, 2017

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н. Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О. К. Подлипский (Московский физико-технический институт). Авторы задач — Н. Х. Агаханов и О. К. Подлипский. Задачи 6.4, 7.2 предложены И. И. Богдановым, а задача 9.4 — П. А. Кожевниковым.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И. И. Богданов, к.ф.-м.н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет подготовил И. И. Богданов.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — в 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — в 4 балла;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — в 2–3 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — в 1 балл.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 2 декабря 2017 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов. Важно отметить, что победителями и призерами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний...»).

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 и 7 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки.

Желаем успешной работы!

В 2017–2018 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 31 января (1 тур) и 1 февраля (2 тур) 2017 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведен региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, участниками регионального этапа являются:

– победители и призеры регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– участники муниципального этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе количество баллов.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Условия и решения задач

6 класс

6.1. Вычеркните из числа 987654321 как можно больше цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 15.

Ответ. Нужно вычеркнуть все цифры, кроме 7 и 5.

Решение. Данное число должно быть минимум двузначным и оканчиваться на 5. Числа 95, 85, 65 на 15 не делятся. Значит, приведенный пример — единственный.

Комментарий. Баллы не снимаются, если только приведен правильный ответ (в том числе в форме «75»).

Приведен способ вычеркивания менее 7 цифр — 0 баллов.

6.2. Сложите из пятиклеточных фигурок, среди которых нет двух одинаковых, какой-нибудь клетчатый квадрат.

Решение. Один из возможных примеров показан на рис. 1.

Комментарий. Среди фигурок есть одинаковые — 0 баллов.

Любой правильный пример разрезания — 7 баллов.

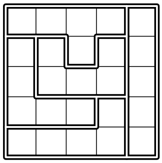

Рис. 1

6.3. В комнате 10 человек — лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечетное число лжецов»; а остальные семь сказали: «В комнате четное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?

Ответ. 3 рыцаря.

Решение. Если в комнате нечетное число лжецов, то рыцарей также будет нечетное число, так как всего в комнате 10 человек. Поэтому одна из двух произнесенных фраз — ложь, а другая — правда. Но и 3, и 7 — нечетные числа, поэтому правдой является фраза «В комнате нечетное число лжецов». Значит, в комнате 3 рыцаря.

Комментарий. Доказано, что одна из двух произнесенных фраз — ложь, а другая правда — 3 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с правильным пояснением, какие люди что говорили — 1 балл.

6.4. Можно ли в равенстве $0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ. Можно.

Решение. Например, $0{,}03 + 0{,}14 + 0{,}26 + 0{,}57 = 1$.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

Только ответ «можно» без примера — 0 баллов.

В примере используются одинаковые цифры вместо некоторых звездочек — 0 баллов.

6.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

Ответ. 27 шаров.

Решение. Заметим, что суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 — в противном случае нашлись бы 10 шаров, среди которых нет красного. Аналогично, суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19.

Так как по условию зеленый шар хотя бы один, а суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9, то синих шаров не больше 8. Теперь из того, что синих шаров не больше 8, а красных и зеленых шаров не больше 19, следует, что суммарное количество шаров не превосходит $8 + 19 = 27$.

Если же в коробке 1 зеленый, 8 синих и 18 красных шаров, то условие задачи выполняется.

Комментарий. Приведен пример распределения цветов для 27 шаров — 2 балла (эти баллы могут суммироваться с упомянутыми ниже).

Доказано только, что суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19 и/или суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 — 2 балла.

Доказано, что в ящике не более 27 шаров — 5 баллов.

7 класс

7.1. Вырежьте из клетчатого квадрата 5×5 одну нецентральную клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на 6 равных клетчатых фигурок, не являющихся прямоугольниками. Приведите пример такого разрезания.

Решение. Один из возможных примеров показан на рис. 2.

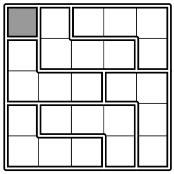

Рис. 2

Комментарий. Вырезана центральная клетка — 0 баллов.

Любой правильный пример разрезания — 7 баллов.

7.2. Можно ли в равенстве $0,{*}{*} + 0,{*}{*} + 0,{*}{*} + 0,{*}{*} = 2$ заменить звездочки различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ. Можно.

Решение. Например, $0,13 + 0,24 + 0,65 + 0,98 = 2$.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

Только ответ «можно» без примера — 0 баллов.

В примере используются одинаковые цифры вместо некоторых звездочек — 0 баллов.

7.3. В классе 26 школьников. Для школьной игры первому ученику дали 2 фишки. Второму — на 3 фишки больше. А каждому следующему давали либо на 3 фишки больше, либо на 3 меньше, чем предыдущему. Затем ученики как-то разбились на три команды. Могло ли оказаться, что суммарное число фишек в каждой команде оказалось одинаковым?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим противное. Тогда суммарное количество фишек у школьников равнялось бы утроенному количеству фишек у одной команды, то есть делилось бы на 3.

Но это количество на 3 не делится. Докажем это. Можно считать, что каждому школьнику сначала дали по 2 зеленые фишки, а потом некоторым из них добавляли красные фишки. Из условия следует, что количество красных фишек у каждого школьника делится на 3. А это значит, что суммарное количество красных фишек также делится на 3. Если бы общее количество фишек делилось на 3, то и количество зеленых фишек также делилось бы на 3, но оно равно $2 \cdot 26 = 52$.

Замечание. Фактически мы показали, что у каждого школьника количество фишек имеет остаток 2 при делении на 3. Тогда суммарное количество фишек будет иметь остаток 1 при делении на 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Замечено, что количество фишек у каждого школьника дает остаток 2 при делении на 3 — 2 балла.

7.4. Турнир лучников проводился по следующим правилам. С каждого участника собрали одинаковый взнос. Организаторы турнира забрали $1/3$ от всех поступивших денег, а оставшиеся деньги пошли в призовой фонд турнира. Робин Гуд, победивший в турнире, получил больше каждого из остальных участников — $1/6$ от призового фонда, однако оказался в убытке. Какое количество лучников могло участвовать в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ. 7 или 8.

Решение. Призовой фонд составляет $\frac{2}{3}$ от всех поступивших денег. Поэтому победитель турнира получил $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$ от поступивших денег. Значит, если число участников не больше восьми, то взнос превышает награду за первое место, а иначе — не превышает. Итак, количество участников не больше восьми.

Так как победитель получил $\frac{1}{6}$ от призового фонда, то остальные участники разделили $\frac{5}{6}$ фонда. При том победитель получил больше каждого из остальных. Поэтому каждый из оставшихся получил меньше $\frac{1}{6}$ фонда, а значит, остальных больше, чем $\frac{5}{6} : \frac{1}{6} = 5$ человек.

Таким образом, в турнире могли участвовать 7 или 8 человек. Обе этих ситуации возможны. Для этого, например, не выигравшие участники могли поровну разделить остающиеся $\frac{5}{6}$

призового фонда (получив по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}<\frac{1}{6}$ или по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}<\frac{1}{6}$ призового фонда).

Комментарий. Доказано, что общее число участников не больше 8 — 3 балла.

Доказано, что общее число участников не меньше 7 — 3 балла.

Приведены примеры турниров с 7 и с 8 участниками — 1 балл.

Баллы за все упомянутые частичные продвижения суммируются.

7.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по 2. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров — синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

Ответ. 26 шаров.

Решение. Заметим, что суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 — в противном случае нашлись бы 10 шаров, среди которых нет красного. Аналогично, суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19.

Так как по условию зеленых шаров хотя бы 2, а суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9, то синих шаров не больше 7. Теперь из того, что синих шаров не больше 7, а красных и зеленых шаров не больше 19, следует, что суммарное количество шаров не превосходит $7+19=26$.

Если же в коробке 2 зеленых, 7 синих и 17 красных шаров, то условие задачи выполняется.

Комментарий. Доказано только, что суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19 и/или суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 — 2 балла.

Доказано, что в ящике не более 26 шаров — 5 баллов.

Приведен пример распределения цветов для 26 шаров — 2 балла.

8 класс

8.1. В школе «Эксперимент» учащимся выставляют оценки от 1 до 5. Борис получил по контрольной двойку. Учитель заметил, что, если ему изменить эту двойку на пятерку, то средний балл по контрольной среди Борисов в классе увеличится ровно в два раза. Сколько Борисов писало контрольную?

Ответ. Два Бориса.

Решение. Пусть контрольную писало m Борисов, и другие Борисы набрали вместе x баллов. Тогда условие на средний балл выглядит так: $2 \cdot \frac{x+2}{m} = \frac{x+5}{m}$. Отсюда $2(x+2) = x+5$, то есть $x = 1$. Это возможно только если контрольную писал еще один Борис, который получил по контрольной единицу. Таким образом, контрольную писало два Бориса.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Приведен только верный пример оценок двух Борисов — 2 балла.

8.2. Можно ли заменить в пяти равенствах вида $* + * + * = * + *$, все звездочки на натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы все равенства получились верными, а каждое из чисел использовалось ровно 1 раз?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть такая замена звездочек на числа возможна. Тогда сумма всех пяти чисел, входящих в первое равенство, четна (она равна удвоенной сумме чисел в одной части). Также четными будут суммы пятерок чисел, входящих в остальные четыре равенства. Но тогда четна и сумма всех чисел. А она — нечетная, так как в этой сумме нечетное количество (а именно 13) нечетных слагаемых.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Замечено, что сумма пяти чисел, входящих в одно равенство, четна — 2 балла.

8.3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар натуральных чисел (a, b), для которых справедливо равенство $a(a+b) = (2^{2017} + 3^{2017})b$.

Решение. Обозначим $N = 2^{2017} + 3^{2017}$. Перепишем уравнение в виде $a^2 = (N-a)b$. Так как a^2 и b положительны, то положительна и разность $N-a$. Значит, $a < N$. Поэтому существует лишь конечное количество таких чисел a (так как a — натуральное). Для каждого такого a однозначно находится $b = \dfrac{a^2}{N-a}$ (причем не все эти b будут натуральными).

Замечание. Также сразу можно было заметить, что обе части уравнения положительны и $a + b > b$, поэтому $a < N$.

Комментарий. Доказано, что $a < N$ (или количество возможных значений a конечно) — 5 баллов.

8.4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) выбраны точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает отрезки AN и AB в точках E и F соответственно. Найдите AB, если $AE = a$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.

Ответ. $2a$.

Решение. Из условия следует, что $\angle ANC = 50^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике ANC имеем $\angle CAN = 40^\circ$. Отсюда $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB = 20^\circ$. Так как $\angle BFM = 110^\circ$, то $\angle AFM = 70^\circ$. Но тогда в треугольнике MAF получаем $\angle AMF = 70^\circ$. Значит, треугольник MAF — равнобедренный, и его биссектриса AE является высотой (см. рис. 3). Но тогда прямоугольные треугольники AME и AMC равны (AM — общая, $\angle CAM = \angle MAE$). Поэтому $AC = a$. Наконец, поскольку в прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle CAB$ равен 60°, гипотенуза равна $AB = 2AC = 2a$.

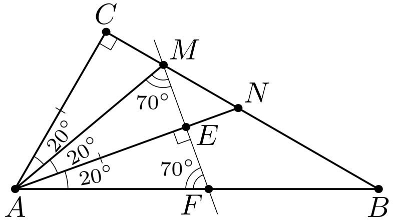

Рис. 3

Комментарий. Найден угол CAB — 2 балла.

Доказано, что треугольник MAF равнобедренный — 1 балл.

Доказано, что треугольники AME и AMC равны — 2 балла.

Баллы за все упомянутые частичные продвижения суммируются.

8.5. В клетках доски 8×8 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В одной из соседних со мной клеток стоит лжец». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число лжецов могло стоять на доске?

Ответ. 9.

Решение. Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым рыцарем должен стоять лжец, а все соседи лжеца должны быть рыцарями.

Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рис. 4. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит лжец, либо (если в ней стоит рыцарь) хотя бы в одной соседней к ней стоит лжец. При этом ни у какой пары отмеченных клеток нет общих соседей. Поэтому лжецов должно быть не меньше 9.

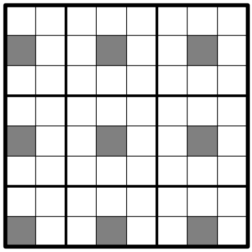

Рис. 4

Если же лжецы будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять рыцари, то условие задачи будет выполнено.

Комментарий. Указано, что в одной из соседних клеток с любым рыцарем должен стоять лжец, а все соседи лжеца должны быть рыцарями — 1 балл.

Приведен пример расстановки 9 лжецов — 1 балл.

Доказано, что лжецов не меньше 9 — 5 баллов.

Баллы за все упомянутые частичные продвижения суммируются.

9 класс

9.1. Можно ли в равенстве $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20$ вычеркнуть из левой части один сомножитель, а из правой — несколько так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ. Можно.

Решение. Если слева вычеркнуть 4, а справа 11, 13, 17, 19 и 16, то оба оставшихся выражения будут равны $2^6 3^4 5^2 7^1$.

Замечание. Приведенный пример — не единственный; например, можно слева вычеркнуть 3 вместо 4, а справа — 12 вместо 16.

Комментарий. Верно указано, какие числа вычеркивать, но не проверено, что получилось верное равенство — 6 баллов.

9.2. На доске написано натуральное число b. Про него сказали три утверждения:

1) это число четное;

2) это число меньше 102;

3) уравнение $x^2 + 20x + b = 0$ имеет хотя бы один корень.

Какое наибольшее число может быть написано на доске, если из этих трех утверждений ровно два — верные?

Ответ. 99.

Решение. Рассмотрим условие 3). Для того, чтобы квадратное уравнение имело хотя бы один корень, нужно, чтобы дискриминант был неотрицательным. То есть $D = 20^2 - 4b \geqslant 0$, откуда $b \leqslant 100$.

Если число, написанное на доске, не меньше 102, то утверждения 2) и 3) не верны. Поэтому написанное число не больше 101.

Если написанное число равно 101, то неверны утверждения 1) и 3), то есть число 101 не подходит.

Если написанное число равно 100, то верны все три утверждения. Значит, число 100 не подходит.

Если написанное число равно 99, то верны ровно два утверждения — 2) и 3). Значит, наибольшее возможное число — 99.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Показано, что третье утверждение эквивалентно $b \leqslant 100$ — 2 балла.

Доказано, что написанное число не больше 101 — 3 балла.

Баллы за все упомянутые частичные продвижения суммируются.

9.3. Из точки A провели касательные AB и AC к окружности с центром O (здесь B и C — точки касания). Точка M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

Решение. Условие касания равносильно тому, что $\angle MAC = \angle ABM$. Но треугольник ABO — прямоугольный (OB — радиус, проведенный к касательной BA), а отрезок BM — его медиана, проведенная к гипотенузе. Поэтому $BM = MA$ (см. рис. 5). Значит, $\angle ABM = \angle MAB = \angle MAC$ (мы использовали то, что AO — биссектриса угла BAC).

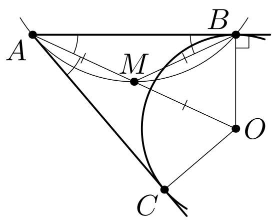

Рис. 5

Комментарий. Доказано, что $BM = MA$ — 3 балла.

9.4. Даны различные положительные числа a, b, c, d такие, что $a + b > c + d$. Докажите, что $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{a}{d} + \frac{b}{c} > 4$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{a}{d} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} + \frac{a+b}{d} > \frac{c+d}{c} + \frac{c+d}{d} = \frac{(c+d)^2}{cd} \geqslant 4.$$

Последнее неравенство справедливо, так как оно равносильно неравенству $(c+d)^2 \geqslant 4cd$, то есть $(c-d)^2 \geqslant 0$.

Комментарий. Решение сведено к доказательству неравенства $\frac{d}{c} + \frac{c}{d} \geqslant 2$ — 4 балла.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим можно использовать без доказательства.

9.5. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке — по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

Ответ. 9.

Решение. Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами.

Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рис. 6. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо (если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней к ней стоит рыцарь. При этом ни у какой пары отмеченных клеток нет общих соседей. Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9.

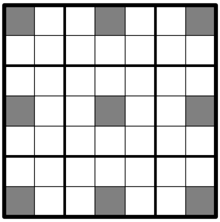

Рис. 6

Если же рыцари будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять лжецы, то условие задачи будет выполнено.

Комментарий. Указано, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами — 1 балл.

Приведен пример расстановки 9 рыцарей — 1 балл.

Доказано, что рыцарей не меньше 9 — 5 баллов.

Баллы за все упомянутые частичные продвижения суммируются.

10 класс

10.1. Числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ разбили на 50 пар, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих пятидесяти сумм может делиться на 20?

Ответ. 49.

Решение. Заметим, что все 50 сумм не могут делиться на 20, так как в этом случае и сумма всех чисел делилась бы на 20. Но сумма всех чисел равна 5050.

Если разбить числа на пары следующим образом: 1 и 99, 2 и 98, …, 49 и 51, 50 и 100, то суммы чисел в первых 49 парах будут равны 100, а значит, будут делиться на 20.

Замечание. То, что суммы чисел во всех парах не могут делиться на 20, можно доказать по-другому. Для этого достаточно рассмотреть числа 20, 40, 60, 80 и 100 и заметить, что если в какую-то пару входит ровно одно число из этих пяти, то сумма чисел пары не может делиться на 20. Но этих чисел нечетное количество, поэтому найдется пара ровно с одним из этих чисел.

Комментарий. Доказано только, что суммы во всех парах не могут делиться на 20 — 4 балла.

Доказано только, что суммы чисел в 49 парах могут делиться на 20 — 2 балла.

10.2. Ненулевые числа a, b, c образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Докажите, что уравнение $ax^2 + 2\sqrt{2}bx + c = 0$ имеет два решения.

Решение. Из характеристического свойства арифметической прогрессии получаем $b = \frac{a+c}{2}$. Тогда дискриминант интересующего нас квадратного уравнения равен $D = 8b^2 - 4ac = 2(a+c)^2 - 4ac = 2a^2 + 2c^2 > 0$. Поэтому квадратное уравнение имеет два решения.

Комментарий. Доказано лишь, что $D \geqslant 0$ (вместо требуемого $D > 0$) — 5 баллов.

10.3. Можно ли какое-нибудь число вида $10000\ldots00001$ представить в виде $x! + y! + z!$, где x, y, z — натуральные числа? (Как обычно, через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

Ответ. Нельзя.

Решение. Каждое число $n!$ при $n \geqslant 2$ является четным. Поэтому среди чисел x, y, z ровно одно равно 1 (все три не могут равняться 1, иначе сумма их факториалов будет равна 3). Пусть, например, $z = 1$. Тогда $x! + y! = 100\ldots00$. Если оба числа x и y не меньше трех, то каждое слагаемое в сумме $x! + y!$ делится на 3, то есть и их сумма делится на 3, что не так. Значит, хотя бы одно из этих двух чисел меньше 3. Пусть, например, $y = 2$, тогда $y! = 2$, поэтому $x! = 99\ldots998$. Последнее невозможно: выше мы отметили, что это число должно делиться на 3.

Комментарий. Доказано, что ровно одно из чисел должно равняться 1 — 2 балла.

Доказано, что еще одно число меньше 3 — 2 балла.

10.4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K, а стороны AC — в точке T. На меньшей дуге TK выбрана точка P. Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP, вторично пересекает окружность в точке N. Найдите PK, если известно, что $AP = a$ и $KN = b$.

Ответ. $\sqrt{ab}$.

Решение. Заметим, что $\angle NKB = \angle NPK$ — это угол между касательной и хордой. А из данной в условии параллельности следует, что $\angle NKB = \angle PAK$ (см. рис. 7). Кроме того, $\angle KNP = \angle PKA$. Значит, треугольники KNP и PKA подобны. Тогда $KN : KP = KP : AP$, откуда $KP^2 = KN \cdot AP = ab$.

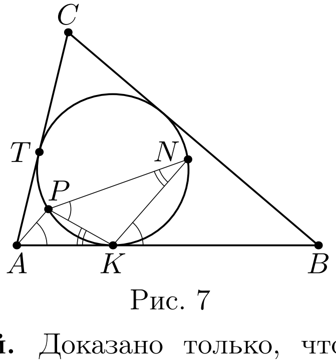

Рис. 7

Комментарий. Доказано только, что в треугольниках KNP и PKA есть одна пара равных углов — 2 балла.

10.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой буб-*

лик». Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 8×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

Ответ. 8 выстрелов.

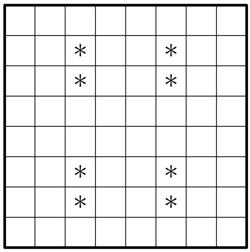

Рис. 8

Решение. Заметим, что если бублик размещен на поле 4×4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведен в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещен рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведен в одну из четырех центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещен так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить.

Разбив поле 8×8 на четыре квадрата 4×4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов.

Если же сделать 8 выстрелов так, как показано на рис. 8, то мы гарантированно раним бублик.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведен пример, показывающий, что за 8 выстрелов можно гарантированно ранить бублик (для этого достаточно верно указать 8 клеток, в которые нужно стрелять) — 2 балла.

Приведено доказательство того, что менее, чем за 8 выстрелов, гарантированно ранить бублик нельзя (а пример отсутствует или неверен) — 5 баллов.

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, для которых найдётся такое число β, что числа $\sin\beta$ и $2\cos\beta$ являются различными корнями уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$.

Ответ. $a = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Решение. По теореме Виета, $\sin\beta \cdot 2\cos\beta = 1$, откуда $\sin 2\beta = 1$ и $\beta = \frac{\pi}{4} + \pi n$ (n — целое). Отсюда $a = -(\sin\beta + 2\cos\beta) = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Оба этих значения реализуются (для трехчлена $x^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 1$ можно положить $\beta = \frac{5\pi}{4}$, а для трехчлена $x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 1$ — соответственно $\beta = \frac{\pi}{4}$).

Комментарий. Получено уравнение $\sin\beta \cdot 2\cos\beta = 1$ — 2 балла.

Уравнение преобразовано к виду $\sin 2\beta = 1$ — 1 балл.

За каждый из двух обоснованно найденных ответов — 2 балла.

Если найдены верные значения a, но не проверено, что трехчлены имеют корни требуемого вида, — баллы не снимаются.

11.2. По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т. е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые три команды выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми тремя командами, на 3 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Сколько всего команд участвовало в турнире, если известно, что их больше трех? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение — 0; ничьих в волейболе не бывает.)

Ответ. 10.

Решение. Пусть количество команд равно $n + 3$. Тогда первые три команды в играх с остальными набрали $3n$ очков, а в играх между собой они набрали 3 очка. Остальные n команд в играх между собой набрали $\dfrac{n(n-1)}{2}$ очков. По условию, $3n + 3 = \dfrac{n(n-1)}{2} + 3$, то есть $n^2 - 7n = 0$. Отсюда получаем, что $n = 7$.

Комментарий. Получена формула, выражающая количество очков, набранных первыми тремя командами, через количество команд — 3 балла.

11.3. Положительные числа x и y, меньшие $1/2$, удовлетворяют неравенству $y^2 - x^2 > y - x$. Докажите, что они удовлетворяют и неравенству $y^3 - x^3 > y - x$.

Решение. Перенесем все выражения в левую часть и разложим на множители: $(y - x)(y + x - 1) > 0$. Отсюда, с учетом неравенства $y + x < 1$, получаем $y - x < 0$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид $(y - x)(y^2 + xy + x^2 - 1) > 0$. Это неравенство верно, так как первые три слагаемых во второй скобке меньше $1/4$, то есть обе скобки принимают отрицательные значения.

Комментарий. Доказано, что $y - x < 0$ — 2 балла.

11.4. В параллелепипеде отмечена одна вершина. Какое наибольшее количество остальных вершин может находиться на одном и том же расстоянии от отмеченной?

Ответ. 6.

Решение. Покажем, что все 7 вершин параллелепипеда, отличных от отмеченной вершины, не могут находиться от нее на одинаковом расстоянии. Пусть это не так, и расстояния от всех остальных вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до точки A_1 одинаковы. Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1H на плоскость ABC (см. рис. 9). Тогда треугольники A_1HA, A_1HB, A_1HC, A_1HD будут равны по гипотенузе и катету. Значит, точка H равноудалена от всех вершин грани $ABCD$, то есть параллелограмм $ABCD$ вписан в окружность с центром H, и он — прямоугольник. Тогда прямоугольником является и грань $A_1B_1C_1D_1$. Но в прямоугольнике отрезки A_1B_1 и A_1D_1 короче отрезка A_1C_1, так как гипотенуза в прямоугольном треугольнике больше катета. Значит, все 7 расстояний быть одинаковыми не могут.

Осталось привести пример параллелепипеда, в котором вершина A_1 равноудалена от 6 вершин. Возьмем параллелепипед, у которого грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты со стороной a, и описанная выше точка H является центром квадрата $ABCD$.

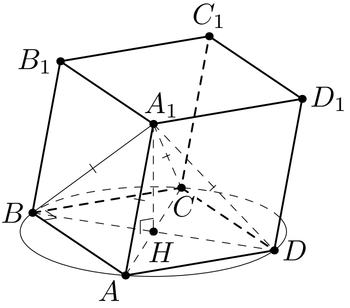

Рис. 9

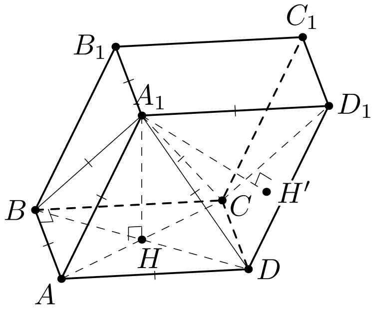

Рис. 10

Пусть длина отрезка A_1H равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (см. рис. 10). Тогда расстояния от точки A_1 до вершин A, B, C, D равны $\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}=a$, то есть равны расстояниям от нее до вершин B и D.

Замечание 1. Тот же пример можно описать и по-другому (см. рис. 10). Пусть грань CDD_1C_1 — ромб со стороной a, в котором $\angle C = 120°$. Разместим грань ABB_1A_1 так, чтобы основание H' перпендикуляра, опущенного из A_1 на плоскость CDD_1C_1, являлось центром правильного треугольника CDD_1, а высоту A_1H' подберем так, чтобы A_1 была равноудалена от точек A, B, B_1, C, D и D_1.

Замечание 2. Приведенный пример — единственный (естественно, с точностью до переобозначения вершин). Поясним это.

Пусть вершина A_1 равноудалена от шести других вершин параллелепипеда. Назовем оставшуюся вершину *особой.* Можно считать, что особая вершина — это либо B_1, либо C_1, либо C.

Если особая вершина — B_1, то из рассуждений из решения следует, что $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник; но нам требуется равенство $A_1C_1 = A_1D_1$, а в прямоугольнике диагональ всегда больше стороны.

Если особая вершина — C_1, то $A_1A = A_1B = A_1B_1$; из этого нетрудно получить, что AA_1B_1B — ромб, в котором $\angle A_1 = 120°$. Так как A_1 также равноудалена от C, D и D_1, отсюда получается описание примера, приведенное в замечании выше.

Наконец, если особая вершина — C, то все три параллелограмма AA_1B_1B, AA_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$ должны быть ромбами с углами 120° при вершине A_1; но это невозможно, ибо сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

Комментарий. Доказано только, что 7 вершин не могут быть равноудалены от восьмой — 3 балла.

Приведен только пример параллелепипеда, у которого одна из вершин равноудалена от 6 других — 3 балла.

11.5. Вася придумал новый корабль для морского боя — *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 10×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

Ответ. 8 выстрелов.

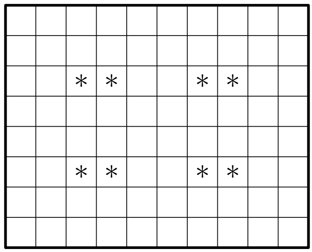

Рис. 11

Решение. Заметим, что если бублик размещен на поле 4×4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведен в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещен рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведен в одну из четырех центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещен так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить.

Выделив на поле 10×8 четыре непересекающихся квадрата 4×4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов.

Если же сделать 8 выстрелов так, как показано на рис. 11, то мы гарантированно раним бублик.

Замечание. Вместо выделения четырех квадратов 4×4 можно также рассмотреть разбиение поля на четыре прямоугольника 5×4.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведен пример, показывающий, что за 8 выстрелов можно гарантированно ранить бублик (для этого достаточно верно указать 8 клеток, в которые нужно стрелять) — 2 балла.

Приведено доказательство того, что менее, чем за 8 выстрелов, гарантированно ранить бублик нельзя (а пример отсутствует или неверен) — 5 баллов.