Материалы для проведения муниципального этапа

XLI МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2014–2015 учебный год

7 декабря 2014 г.

Долгопрудный, 2014

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н. Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О. К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)). Авторы задач Н. Х. Агаханов и О. К. Подлипский.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И. И. Богданов, к.ф.-м.н. Б. В. Трушин, Д. А. Белов.

Компьютерный макет подготовил И. И. Богданов.

Уважаемые коллеги!

Просим перед раздачей заданий сделать во всех аудиториях объявление, что во всех задачах необходимо обосновывать свой ответ.

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, рекомендуем при проверке работ оценивать:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, её содержанию и оценке работ участников можно задать 7 декабря 2014 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможного количества баллов, то есть не менее 18 баллов.

Важно отметить, что победителями и призёрами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний…»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли…», «Может ли…» или «Существует ли…»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 класса, не умеют чётко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Желаем успешной работы!

В 2014–2015 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 2 февраля (1 тур) и 3 февраля (2 тур) 2015 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведён региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, участниками регионального этапа являются:

– победители и призёры регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– участники муниципального этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе количество баллов.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Для формирования списков участников регионального этапа олимпиады и олимпиады Эйлера просьба направить копии списков победителей и призёров по 8–11 классам в электронном виде в Оргкомитет олимпиады по адресу `mosoblmath2015@mail.ru`.

Условия и решения задач

6 класс

6.1. На листке написано слово КОРОБКА. Разрешается взять любые две соседние буквы, поменять их местами и одну из этих двух букв заменить на любую другую. Как за пять таких операций превратить слово КОРОБКА в слово БАРАБАН?

Решение. Будем изменять слово КОРОБКА так: КОРОБКА → АКРОБКА → БАРОБКА → БАРОБАН → → БАРБИАН → БАРАБАН.

Замечание. Возможны и другие последовательности операций, например: КОРОБКА → КОРОБАН → КОРББАН → → КОБАБАН → КБРАБАН → БАРАБАН или же КОРОБКА → КОУРБКА → КОРАБКА → ОБРАБКА → → БАРАБКА → БАРАБАН.

Комментарий. Любой правильный пример с 5 операциями — 7 баллов.

Пример более чем с 5 операциями — 0 баллов.

6.2. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстречу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из ребят. Кого именно? (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны.)

Ответ. Пети.

Решение. Пусть скорость собаки в полтора раза больше скорости Коли. За время забега Коля пробежал ровно одну дистанцию. Если бы собака бегала в полтора раза быстрее его, то она пробежала бы полторы дистанции (она догнала Колю на финише). Это означало бы, что за время забега она добежала до старта и потом пробежала бы до финиша. Но тогда это означало бы, что Петю она встретила на старте, то есть его скорость равнялась бы нулю. Это невозможно.

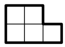
Значит, скорость собаки в полтора раза больше скорости Пети.

Комментарий. Объяснение того, что скорость собаки могла быть в полтора раза больше скорости Пети, не требуется.

6.3. Вокруг круглого стола сидят одиннадцать человек — каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могли ли все одиннадцать ответить «Лжец»?

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что все одиннадцать ответили «Лжец». Лжец мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит Рыцарь. А Рыцарь мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит Лжец. Значит, сидящие за столом Лжецы и Рыцари чередуются. Но одиннадцать — нечетное число, поэтому Лжецы и Рыцари не могут чередоваться.

6.4. На какое наименьшее количество фигурок можно полностью разрезать квадрат 7×7, если фигурки — трёхклеточные уголки  и пятиклеточные фигурки  ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Ответ. 11 фигурок.

Решение. Каждый уголок состоит из трёх клеток квадрата, пятиклеточная фигурка — из пяти клеток, а каждая из 49 клеток окажется в одной из фигурок разрезания. Следовательно общее количество фигурок будет наименьшим, если пятиклеточных фигурок будет наибольшее возможное количество. То есть нам нужно, чтобы трёхклеточных фигурок было наименьшее возможное количество.

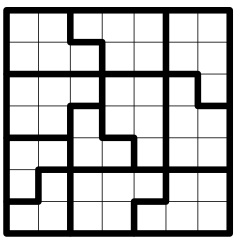


Рис. 1

Квадрат нельзя разрезать только на пятиклеточные фигурки, так как 49 не делится на 5. Также невозможны случаи, когда при разрезании будет ровно одна трёхклеточная фигурка или будут ровно две трёхклеточных фигурки, так как в первом случае на пятиклеточные фигурки останется $49 - 3 = 46$ клеток, а во втором — $49 - 6 = 43$ клетки; однако числа 46 и 43 не делятся на 5. Если же будут ровно три трёхклеточных фигурки, то останется $49 - 9 = 40$ клеток, их количество делится на 5 ($40 = 5 \cdot 8$). Осталось показать, что требуемое разрезание на 3 трёхклеточных и 8 пятиклеточных фигурок существует (см. рис. 1). Поэтому наименьшее количество фигурок равно $3 + 8 = 11$.

Комментарий. Доказано, что потребуется не менее 11 фигурок — 4 балла.

Приведён пример разрезания на 11 фигурок — 3 балла.

6.5. Десяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному — с числами 1 и 2, другому — 3 и 4, третьему — 5 и 6, ..., последнему — 19 и 20. Мальчики встали в произвольном порядке в круг, и их пронумеровали по часовой стрелке. После этого первый и второй поменялись карточками, затем второй и третий, третий и четвертый, ..., десятый и первый. При обмене каждый отдавал другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него были. В конце оказалось, что у первого мальчика сумма чисел на карточках равна 12. Какие карточки у него могли быть вначале? Найдите все варианты.

Ответ. 9 и 10 или 1 и 2.

Решение. Если карточка с числом 1 находилась вначале у первого мальчика, то после каждого обмена она переходила к следующему, то есть в итоге должна была вернуться к первому мальчику. В конце сумма чисел на его карточках стала равной 12. Значит, на его второй карточке — число 11. Эту карточку ему могли дать при первом обмене, если у его соседа были карточки с числами 11 и 12; при последнем обмене тогда он отдаст карточку 2 и получит 1 взамен.

Рассмотрим случай, когда пара карточек с числами 1 и 2 была у кого-то другого. При первом своем обмене этот мальчик отдал бы карточку с числом 1, а при втором — с числом 2. И далее эта карточка с числом 2 передавалась бы по кругу, дойдя до первого мальчика. Чтобы сумма чисел на его карточках стала равной 12, нужно, чтобы либо после первого обмена к нему пришла карточка с числом 10, либо это число у него оставалось после первого обмена. Первое невозможно, так как при первом обмене передается меньшее, то есть нечетное число. Значит, у него оставалось число 10, и вначале была пара карточек 9 и 10. Отметим, что этот случай также возможен.

Комментарий. Обоснованно получен только один из двух вариантов ответа — 3 балла.

7 класс

7.1. Вася пришел на почту отправить два письма (каждое письмо весит целое число граммов, но Вася не знает их вес). Оказалось, что стоимость отправки письма определяется следующим образом. Отправка письма с весом не более 10 грамм стоит 15 руб. Отправка письма с весом более 10 грамм стоит 15 руб., и дополнительно берется 1 руб. за каждый грамм веса сверх 10. Вася предложил сразу положить два письма на весы и заплатить 30 руб. и добавить по 1 руб. за каждый грамм сверх 20. Верно ли, что при таком способе он всегда заплатит столько же денег, как если бы он оплачивал отправку писем по отдельности?

Ответ. Неверно.

Решение. Предположим, что у Васи два письма. Одно — весом 5 г, а второе — весом 15 г. Тогда по правилам за отправку первого письма он должен заплатить 15 руб., а за отправку второго — $15 + 5 = 20$ руб. То есть всего 35 руб. А если положить на весы оба письма, то они вместе будут весить ровно 20 г. И по «Васиным правилам» за их отправку нужно было бы заплатить 30 руб.

7.2. Петя нарисовал на плоскости несколько (больше одной) прямых, которые разбили плоскость на несколько частей. Потом он добавил еще одну прямую, и количество частей, на которые разрезана плоскость, увеличилось на 2; потом, после проведения еще одной прямой — ещё на 3, наконец, после проведения еще одной прямой — увеличилось еще на 4. Как Петя мог выполнить такое задание? (Приведите рисунок, занумеровав прямые по порядку их построения).

Решение. Три возможных примера приведены на рис. 2 (прямые a, b и — в третьем примере — c были нарисованы, прямые 1, 2 и 3 добавлялись Петей).

Замечание. Существуют и другие способы.

Комментарий. Любой верный пример (с указанием порядка проведения прямых) — 7 баллов.

7.3. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстре-

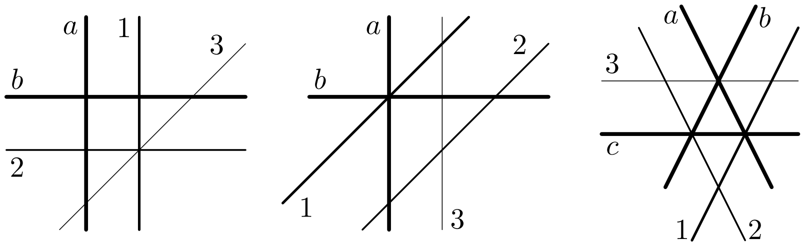


Рис. 2

чу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Найдите отношение скоростей мальчиков, если известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из них. (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны).

Ответ. Отношение скорости Пети к скорости Коли равно $11:15$.

Решение. Пусть скорость собаки в полтора раза больше скорости Коли. За время забега Коля пробежал ровно одну дистанцию. Если бы собака бегала в полтора раза быстрее его, то она пробежала бы полторы дистанции (она догнала Колю на финише). Это означало бы, что за время забега она добежала до старта и потом пробежала бы до финиша. Но тогда это означало бы, что Петю она встретила на старте, то есть его скорость равнялась бы нулю. Это невозможно.

Значит, скорость собаки в полтора раза больше скорости Пети. Тогда, если обозначить длину дистанции за 10 частей, то встреча Пети и собаки произошла в 3 частях пути от середины дистанции. То есть до финиша Коли собака пробежала $3+3+5=11$ частей пути. Значит, ее скорость в 1,1 раза больше скорости Коли.

Пусть скорость собаки равна x км/час. Тогда скорость Пети равна $x/1{,}5$ км/ч, а скорость Коли — $x/1{,}1$ км/ч. Поэтому отношение скорости Пети к скорости Коли есть $(x/1{,}5):(x/1{,}1) = 1{,}1:1{,}5 = 11:15$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 2 балла.

Доказано, что скорость собаки в полтора раза больше скорости Пети — 3 балла.

7.4. Числа от 1 до $2n$ $(n > 1)$ разбили на две группы по n чисел, и числа в группах перемножили. Может ли разность этих произведений равняться числу 555555?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что найдется такое n, что числа от 1 до $2n$ можно разбить требуемым образом. Разность произведений может равняться нечетному числу 555555 только если одно произведение — нечетное, а другое — четное. Но произведение натуральных чисел нечетно, только если все сомножители нечетны. А среди чисел от 1 до $2n$ ровно n нечетных чисел. Значит, числа от 1 до $2n$ должны быть разбиты на нечетные числа $(1, 3, \ldots, 2n-1)$ и четные числа $(2, 4, \ldots, 2n)$. И при этом $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n) - 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = 555555$. Заметим, что $2n > 12$, так как $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 12 = 46080 < 555555$. Но тогда среди четных чисел встретятся числа 6 и 12. Поэтому произведение четных чисел делится на 9. Среди нечетных чисел встретится число 9. Поэтому произведение нечетных чисел также делится на 9. Значит, разность произведений должна делиться на 9. А число 555555 на 9 не делится. Противоречие.

Комментарий. Показано, что для того, чтобы разность была нечетной, числа должны быть разбиты на группы четных и нечетных чисел — 2 балла.

7.5. Вокруг круглого стола сидят 39 человек — каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могло ли быть получено 37 ответов «Лжец» и 2 ответа «Рыцарь»?

Ответ. Не могло.

Решение. Заметим, что ответ «Лжец» может быть получен, только если справа от Лжеца сидит Рыцарь или справа от Рыцаря сидит Лжец. А ответ «Рыцарь» может быть получен, только если справа от Лжеца сидит Лжец или справа от Рыцаря сидит Рыцарь.

Рассмотрим двух Рыцарей (или двух Лжецов), сидящих рядом, и удалим из-за стола того из них, кто сидит слева (он сказал «Рыцарь»). Удалим аналогичным образом еще одного человека, сказавшего «Рыцарь», из-за стола. Все оставшиеся про своего соседа справа говорят «Лжец». Но тогда за столом сидит 37 человек, и при этом справа от Лжеца сидит Рыцарь или справа от Рыцаря сидит Лжец. То есть теперь Лжецы и Рыцари за столом чередуются. Но 37 — нечетное число, и такое чередование невозможно.

8 класс

8.1. Точка $A(1;2)$ расположена ниже прямых $y = ax+b$ и $y = cx+d$. А как точка A может быть расположена по отношению к прямой $y = 0{,}5(a+c)x + 0{,}5(b+d)$?

Ответ. Ниже.

Решение. Точка $A(1;2)$ расположена ниже прямой $y = ax+$ $+b$ — это означает, что $2 < a\cdot 1+b$, то есть $2 < a+b$. Аналогично $2 < c+d$. Сложив эти неравенства одного знака мы получаем: $4 < (a+c)+(b+d)$, то есть $2 < 0{,}5(a+c)\cdot 1 + 0{,}5(b+d)$. Это и означает то, что точка A расположена ниже прямой $y = 0{,}5(a+$ $+c)x + 0{,}5(b+d)$.

8.2. Петя хочет подобрать простые числа a и b так, чтобы для любого простого p значение выражения $ap+b$ было составным числом. Сможет ли он это сделать?

Ответ. Сможет.

Решение. Например, Петя может задать $a = 5$ и $b = 11$. Рассмотрим выражение $f(p) = 5p + 11$. Тогда, если подставить вместо p любое нечетное простое число, то значение выражения будет четным числом (как сумма двух нечетных чисел), большим 2, то есть составным. Также заметим, что $f(2) = 5\cdot 2+11 =$ $= 21$ — составное. То есть выражение $f(p)$ при любом простом p принимает составное значение.

Комментарий. Верный пример без обоснования того, что он подходит — 2 балла.

Верный пример, проверены нечетные простые, но не проверено число 2 — 5 баллов.

Пример, который не подходит хотя бы для одного простого числа — 0 баллов.

8.3. Докажите, что для любого натурального числа N, оканчивающегося на 12345, можно найти три таких натуральных числа a, b и c, что $N = a+b+c+abc$.

Решение. Положим $c = 1$. Тогда $a+b+c+abc = a+b+1+$ $+ab = (a+1)(b+1)$. Если число N оканчивается на 12345, то оно делится на 5, то есть $N = 5\cdot m$. Если теперь взять $a = 4$ и $b = m-1$, то получим $(a+1)(b+1) = 5m = N$, что и требовалось.

8.4. Окружность с центром O вписана в угол BAC. Касательная к окружности, параллельная AO, пересекает луч AB в точке N. Докажите, что $AN = AO$.

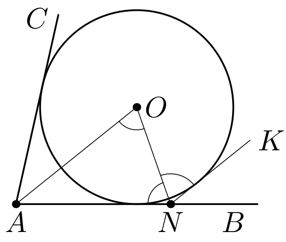


Рис. 3

Решение. Касательная, упомянутая в условии, является второй стороной угла ANK, в который вписана данная окружность. Поэтому прямая NO является биссектрисой угла ANK, откуда $\angle ANO = \angle KNO$. Из параллельности прямых AO и NK вытекает, что $\angle KNO = \angle NOA$. Значит, в треугольнике ANO углы при стороне NO равны, откуда и следует утверждение задачи.

8.5. На столе лежат 10 карточек с числами от 10 до 19 (одна карточка с числом 10, одна — с числом 11, ..., одна — с числом 19). Петя и Вася играют в следующую игру. Первым ходит Петя. Они по очереди берут со стола по одной карточке (игроки видят числа на карточках). После того, как они заберут со стола все карточки, каждый из игроков перемножает пять чисел на своих карточках, после чего из большего результата вычитается меньший. Если полученное число оканчивается на 2, 3, 4, 5 или 6, то выигрывает Вася, иначе выигрывает Петя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию — то есть такую стратегию, которая позволяет ему выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ. Петя.

Решение. Покажем, что Петя может добиться того, что каждое из двух произведений чисел будет делиться на 10. А значит, разность этих произведений будет оканчиваться на 0, и Петя выиграет.

Заметим, что в игре будет сделано 10 ходов, и последнюю (десятую) карточку со стола заберет Вася. Это означает, что Петя может «заставить» Васю взять определенную карточку. Для этого Петя просто должен не брать её своими ходами. У него всегда есть возможность взять другую карточку.

Пусть первым ходом Петя возьмет карточку с числом 10. Запретим Пете брать карточку с числом 15. Тогда эту карточку обязательно возьмет Вася. Пусть вторым своим ходом Петя возьмет карточку с любым нечётным числом (кроме 15). Заметим, что среди чисел от 10 до 19 ровно 5 чётных и ровно 5 нечётных. Так как Петя возьмет одну карточку с нечётным числом, то Вася возьмет хотя бы одну карточку с чётным. Таким образом, в конце игры произведение чисел на карточках Пети делится на 10, так как он взял карточку с числом 10. С другой стороны, произведение чисел на карточках Васи также делится на 10, поскольку он взял карточку с числом 15 и карточку с чётным числом. Значит, разность этих произведений будет оканчиваться на 0.

Замечание. Петя может добиться того, что каждое из двух произведений чисел будет делиться на 10, и по-другому. Первым своим ходом он должен взять карточку с числом 15, вторым ходом — с чётным числом, отличным от 10; при этом он может «заставить» Васю взять карточку с числом 10.

9 класс

9.1. Числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x(x+1) = y(y+1) = z(z+1)$. Докажите, что $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$.

Решение. Из первого равенства получаем, что $x^2+x-y^2-y=0$, то есть $(x-y)(x+y+1)=0$. Аналогично, $(x-z)(x+z+1)=0$. Если хотя бы одна из скобок $(x-y)$ или $(z-x)$ обращается в ноль, то и произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ равно нулю. В противном случае получаем $x+y+1=0$ и $x+z+1=0$, откуда $y=z$, и тогда произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ вновь обращается в ноль.

9.2. В одной из клеток таблицы 6×6 записано число 2014, а в остальных 35 клетках записаны двойки. Разрешается проделать следующую операцию — выбрать любую строку или любой столбец и прибавить к числам, записанным в выбранной строке (или столбце) по единице. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа в таблице равными?

Ответ. Нельзя.

Решение. Заметим, что при указанных операциях сумма чисел в таблице увеличивается на 6. Изначально эта сумма равнялась $2014+35\cdot 2=2084$. Если бы все числа удалось сделать равными k за t операций, то сумма чисел в таблице равнялась бы $36k$. При этом $2084+6t=36k$, откуда $2084=36k-6t=6(6k-t)$. Но число 2084 на 6 не делится, поэтому все числа в таблице нельзя сделать равными.

9.3. На левой половине доски написаны 11 натуральных чисел, а на правой — наибольшие общие делители каждой пары чисел левой половины доски. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на левой половине доски, если известно, что любое число, написанное на одной половине доски, встречается и на другой ее половине?

Ответ. 10.

Решение. Заметим вначале, что для любых натуральных чисел $A \geqslant B$ выполняется неравенство НОД$(A, B) \leqslant A$, причем равенство выполняется только в случае, когда $A = B$. Пусть $A \geqslant B$ — два самых больших числа на левой половине доски. Тогда на правой половине число A может появиться только в одном случае, когда $A = B$; НОД всех других пар чисел будет меньше A. Значит, на левой половине доски не больше 10 различных чисел. Записав на левую половину доски числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 1024, на правой мы получим только такие же числа.

Комментарий. Доказано, что на левой половине доски не более 10 различных чисел — 4 балла.

Приведен верный пример с 10 различными числами — 3 балла.

9.4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Отрезки DE и DF являются биссектрисами треугольников ADC и BDC. Оказалось, что $CD = EF$. Докажите, что точка D — середина гипотенузы AB.

Решение. В силу того, что DE и DF являются биссектрисами смежных углов ADC и BDC, следует, что угол EDF — прямой. Тогда точки C и D лежат на окружности с диаметром EF. Из равенства $CD = EF$ следует, что и хорда CD является диаметром этой окружности. Но тогда углы DFC и DEC — прямые. Это означает, что биссектрисы DF и DE треугольников BDC и ADC являются их высотами. Поэтому эти треугольники равнобедренные: $BD = DC$ и $CD = DA$. Отсюда следует утверждение задачи.

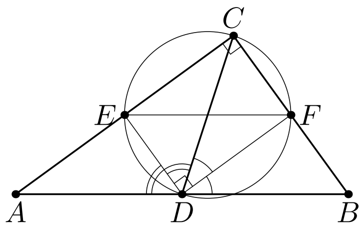


Рис. 4

9.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, сам отмечает две строки. В конце вычисляется сумма шести чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма равнялась 3000?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Вася запишет в первую строку слева направо числа 100, 101, 102, $\ldots$, 129 а во вторую — слева направо числа 900, 899, 898, $\ldots$, 871. Остальные клетки таблицы Вася может заполнить произвольно. Тогда пары чисел, стоящих в одном столбце в первых двух строках, имеют одинаковую сумму: $100 + 900 = 101 + 899 = 102 + 898 = \ldots = 129 + 871 = 1000$. Теперь, какие бы три столбца ни выбрал бы Петя, Вася должен выбрать две первые строки. Тогда сумма шести чисел, стоящих на их пересечении, будет равна $1000 \cdot 3 = 3000$.

10 класс

10.1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 10000. Объясните свой ответ.

Ответ. 255558.

Решение. Заметим, что в наименьшем натуральном числе с произведением цифр 10000 не будет цифры 1. Действительно, если ее убрать, то произведение цифр не изменится, а число уменьшится. Теперь заметим, что $10000 = 2^4 \cdot 5^4$. Отсюда следует, что в искомом числе обязательно будет ровно четыре цифры 5. А произведение остальных цифр равно $2^4 = 16$. То есть в числе будет еще по крайней мере две цифры. Чтобы число было наименьшим, нужно чтобы цифр было ровно две. Эти цифры могут быть 2 и 8 или 4 и 4. Если нам дан набор цифр, то наименьшее число получится, если мы упорядочим цифры по возрастанию (в старшем разряде должна стоять самая маленькая цифра). Поэтому осталось выбрать наименьшее из чисел 255558 и 445555. Это число 255558.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 2 балла.

10.2. Петя хочет подобрать различные простые числа a, b, c и d так, чтобы для любого простого p значение выражения $ap^3 + bp^2 + cp + d$ было составным числом. Сможет ли он это сделать?

Ответ. Сможет.

Решение. Например, Петя может задать $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ и $d = 11$. Рассмотрим выражение $f(p) = 3p^3 + 5p^2 + 7p + 11$. Тогда, если подставить вместо p любое нечетное простое число, то значение выражения будет чётным числом (как сумма четырёх нечётных чисел), большим 2, то есть составным. Также заметим, что $f(2) = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 11 = 69$ — составное. То есть $f(p)$ при любом простом p принимает составное значение.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Верный пример без обоснования того, что он подходит — 2 балла.

Верный пример, проверены нечетные простые, но не проверено число 2 — 5 баллов.

Пример, который не подходит хотя бы для одного простого числа — 0 баллов.

10.3. Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа — их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят, совпасть?

Ответ. Не могли.

Решение. Пусть на доске написаны числа $0 < a < b < c$. Тогда У Пети записаны числа $a + b < a + c < b + c$, а у Коли числа $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Предположим, что числа в тетрадях могли совпасть. Тогда меньшее число равно меньшему, среднее — среднему, большее — большему, то есть $a + b = \frac{1}{c}, a + c = \frac{1}{b}, b + c = \frac{1}{a}$. Из первых двух равенств получаем $ac + bc = 1$ и $ab + bc = 1$. Вычтем из первого полученного равенства второе. Получим $ac = ab$. Отсюда $c = b$ — противоречие.

Комментарий. Числа, записанные в тетрадях, упорядочены по возрастанию и получена система из 3 уравнений — 5 баллов.

10.4. Две окружности равных радиусов пересекаются в точках B и C. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC = CE$. Докажите, что угол DAE — прямой.

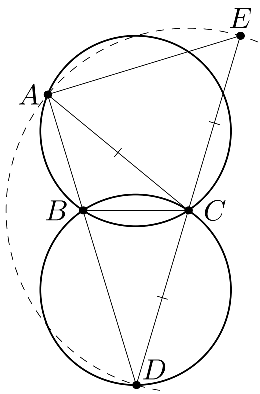


Рис. 5

Решение. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD — равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$ (последнее — в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует утверждение задачи.

10.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, отмечает три строки. В конце вычисляется сумма девяти чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма делилась на 3000?

Ответ. Может.

Решение. Пусть Вася запишет в первую строку слева направо числа $1, 2, 3, \ldots, 30$, во вторую — слева направо числа $99, 100, 101, \ldots, 128$, а в третью — слева направо числа $900, 898, 896, \ldots, 842$; остальные клетки таблицы Вася может заполнить произвольно. Тогда тройки чисел, стоящих в одном столбце в первых трех строках, имеют одинаковую сумму: $1 + 99 + 900 = 2 + 100 + 898 = 3 + 101 + 896 = \ldots = 30 + 128 + 842 = 1000$. Теперь, какие бы три столбца ни выбрал бы Петя, Вася должен выбрать три первые строки. Тогда сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении будет равна $1000 \cdot 3 = 3000$.

11 класс

11.1. Для натурального числа вычисляются суммы любых двух его цифр, стоящих рядом. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все эти суммы различны.

Ответ. $A = 99887766554433221100$.

Решение. Покажем, что число A, указанное в ответе — искомое. Наибольшее возможное значение суммы пары цифр равно 18, поэтому всего можно получить не более 19 пар сумм: от 0 до 18. Значит, искомое число X не более, чем 20-значное. Рассмотрим теперь только 20-значные числа. Если какая-то из первой пары цифр числа X будет меньше 9, то и число будет меньше, чем A. Значит, X начинается с двух девяток. Третья цифра — не 9, а если она меньше 8, то X будет меньше A. Значит, третья цифра числа X равна 8. Аналогично получаем следующие цифры.

Комментарий. Верный ответ без обоснований — 2 балла.

11.2. Про квадратный трёхчлен $f(x)$ известно, что $f(0) + f(1) = 0$ и $f(2) + f(3) = 0$. Найдите сумму корней уравнения $f(x) = 0$.

Ответ. 3.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$. Тогда данные равенства перепишутся в виде $c+a+b+c = 0$ и $4a+2b+c+9a+3b+c = 0$, то есть получаем систему уравнений $a+b+2c = 0$, $13a+5b+2c = 0$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $12a + 4b = 0$, откуда $b = -3a$. Подставив это равенство в первое уравнение, получаем, что $c = a$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет вид: $a(x^2 - 3x + 1) = 0$. Согласно теореме Виета, сумма его корней равна 3.

11.3. Докажите неравенство

$$\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}} + \sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}} > 2.$$

Решение. Пусть $A = \sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}} + \sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}$. Тогда

$$A = \sqrt[2014]{\frac{2014}{2012}} + \sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}} > \sqrt[2014]{\frac{2014}{2013}} + \sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}} = x + \frac{1}{x}\,,$$

где $x = \sqrt[2014]{\dfrac{2013}{2014}} > 0$. Для положительных чисел a и b выполняется неравенство о средних: $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Следовательно, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$. Отсюда следует, что $A > 2$.

Комментарий. Доказательство сведено к неравенству о средних — 3 балла.

На олимпиаде запрещено использовать вычислительную технику. Поэтому любые приближенные вычисления без обоснований оцениваются в 0 баллов.

11.4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах SA, SB, SC и SD выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку. Докажите, что если точка A_1 — середина ребра SA, то точки B_1, C_1 и D_1 — середины ребер SB, SC и SD.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$. Пусть указанные в условии отрезки пересекаются в точке P. Отрезки AC_1 и CA_1 лежат в одной плоскости ASC, значит, точка P их пересечения принадлежит этой плоскости. Аналогично, являясь точкой пересечения отрезков BD_1 и DB_1, лежащих в плоскости BSD, точка P лежит в этой плоскости. Значит, точка P лежит на линии пересечения плоскостей ASC и BSD, то есть на отрезке SO.

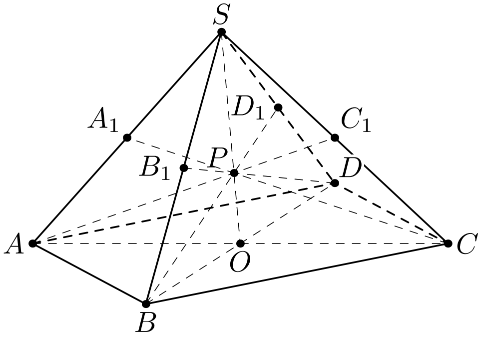


Рис. 6

Отрезок SO является медианой треугольника ASC, поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам. Значит, точка P является точкой пересечения медиан AC_1 и SO треугольника ASC. Поэтому отрезок CA_1, проходящий через эту точку, является медианой треугольника ASC, то есть точка A_1 — середина ребра SA. Отсюда следует, что $SP : PO = 2 : 1$. Но тогда отрезки BD_1 и DB_1 являются медианами треугольника BSD, откуда B_1 и D_1 — середины ребер SB и SD. Утверждение доказано.

11.5. Пятидесяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному с числами 1 и 2, другому — 3 и 4, еще одному — 5 и 6, ..., последнему — 99 и 100. Каждую минуту мальчики разбиваются на 25 пар, и в каждой паре каждый мальчик отдаёт другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него есть. Известно, что при первом обмене у каждого мальчика разность между числами на отданной и полученной карточках была не больше 50. Могло ли случиться так, что через несколько минут по крайней мере у 48 мальчиков окажутся те же карточки, которые у них были вначале?

Ответ. Не могло.

Решение. Покажем, как указать трех мальчиков, у которых *никогда* не окажутся их начальные карточки. Первым будет мальчик A, у которого вначале были карточки 1 и 2. Действительно, после первого обмена карточка с числом 1 окажется у кого-то другого. Пусть в некоторый момент у A впервые окажутся вновь обе карточки 1 и 2. Это могло произойти только если при указанном обмене к нему пришла одна из этих карточек, а другая уже у него была. Но тогда при этом же обмене от него должна была уйти вторая из этой пары карточек, так как 1 и 2 — наименьшие числа в данном наборе.

Вторым будет мальчик B, у которого вначале были карточки 99 и 100. У него при первом обмене должна была остаться карточка с числом 100 — самым большим из всех чисел на карточках, и эта карточка не передавалась. В то же время переданное другому мальчику число 99 не может вернуться к B в силу того, что теперь оно не является меньшим у того, к кому она попала.

Третьим будет мальчик C, к которому при первом обмене попала карточка с числом 99. Действительно, она уже никогда не будет меньшей в паре его карточек (карточка 100 — у мальчика B), и потому он ее никому уже передавать не будет.

Осталось заметить, что мальчики A и C — разные, так как в самом начале мальчики с карточками с числами 1 и 2 и с числами 99 и 100 не обменивались, иначе при первом обмене у них разность между числами на отданной и полученной карточке была равна 98, что больше 50.

Комментарий. Показано, что карточки 1 и 2 не смогут оказаться у одного мальчика — 2 балла.

Показано, что карточка с числом 99 и карточка с числом 100 будут у разных мальчиков — 3 балла.