Материалы для проведения регионального этапа

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012–2013 учебный год

Первый день

26–27 января 2013 г.

Москва, 2013

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, С.Н. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, Р.А. Гимадеев, А.Ю. Головко, М.А. Григорьев, С.Г. Григорьев, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, Л.Н. Исхаков, П.А. Кожевников, Д.О. Лазарев, М.С. Миронов, П.А. Мищенко, Е.Г. Молчанов, А.М. Останин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, И.С. Рубанов, М.Б. Скопенков, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012–2013 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 26 и 27 января 2013 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, удовлетворяющие условию, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

Комментарий. Верный ответ и пример числа N с цифрой 6 на последнем месте — 1 балл.

Установлено, что последняя цифра числа M на 2 больше последней цифры числа N — 1 балл.

Показано, что последняя цифра числа N может быть только единицей или шестёркой — 2 балла.

Баллы за различные продвижения складываются.

Заметим, что в задаче не требуется приведение примера такого числа. Достаточно доказать, что никакая цифра, кроме 6, последней оказаться не может.

9.2. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB. *(Н. Агаханов)*

Решение. Покажем, что $\angle A_1C_1B_1 = 45^\circ$. Именно, из равнобедренных треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1 имеем $\angle AC_1B_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ и $\angle BC_1A_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$, а тогда $\angle A_1C_1B_1 = 180^\circ - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45^\circ$.

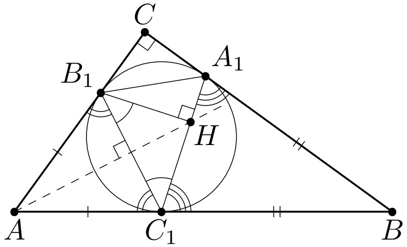

Рис. 1

Итак, острый угол в прямоугольном треугольнике $\triangle B_1HC_1$ равен 45°; значит, этот треугольник равнобедренный. Поэтому точка H лежит на серединном перпендикуляре к отрезку B_1C_1. Но этим же серединным перпендикуляром является биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C_1. Это и значит, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Замечание. После нахождения равенств $\angle B_1C_1H = \angle C_1B_1H = 45^\circ$ можно действовать и по-другому. Именно, треугольники AB_1H и AC_1H равны по двум сторонам ($AB_1 = AC_1$, $B_1H = C_1H$) и углу между ними; поэтому $\angle B_1AH = \angle C_1AH$.

Комментарий. Доказано только, что $\angle A_1C_1B_1 = 45^\circ$ — 2 балла.

9.3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток  так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.) *(Д. Храмцов)*

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое разбиение нашлось. Рассмотрим первую и вторую снизу горизонтали доски; обозначим их H_1 и H_2. Каждый уголок на доске пересекается с двумя соседними горизонталями. Значит, если уголок пересекается с H_1, то он пересекается и с H_2. Теперь, если горизонталь H_2 пересекает какой-то уголок, не пересекающийся с H_1, то она пересекает больше уголков, чем H_1, что невозможно. Итак, все уголки, пересекающиеся с первой или второй горизонталями, не выходят за их пределы и образуют вместе горизонтальную полосу H размера 2×12.

Аналогично, все уголки, пересекающиеся с первой или второй слева вертикалями V_1 и V_2, образуют вместе вертикальную полосу V размера 12×2. В таком случае все уголки, пересекающиеся с левым нижним квадратом 2×2, должны лежать как в H, так и в V, то есть должны лежать в этом квадрате. Но тогда квадрат 2×2 должен разбиться на трёхклеточные уголки, что невозможно. Противоречие.

Комментарий. Доказано только, что (вертикальная или горизонтальная) полоса размера 2×12 с края доски полностью замощена уголками — 3 балла.

9.4. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася — модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя — модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного. *(И. Богданов)*

Решение. Пусть v — наибольшее из Васиных чисел, а t — какое-то из Толиных (скажем, $t = |a - d|$, где a, b, c, d — четыре выписанных подряд числа). Достаточно доказать, что $t \geqslant v$.

Среди Петиных чисел встречается число $|a - b|$; значит, $|a - b| \geqslant 2v$. С другой стороны, $|b - d|$ — одно из Васиных чисел; значит, $|b - d| \leqslant v$. Итак, $t = |a - d| = |(a - b) + (b - d)| \geqslant |a - b| - |b - d| \geqslant 2v - v = v$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Доказано только, что любое Толино число не меньше **какого-то** Васиного — 0 баллов.

10 класс

10.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, о которых идет речь в условии, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

Комментарий. Верный ответ и пример числа N с цифрой 6 на последнем месте — 1 балл.

Установлено, что последняя цифра числа M на 2 больше последней цифры числа N — 1 балл.

Показано, что последняя цифра числа N может быть только единицей или шестёркой — 2 балла.

Баллы за различные продвижения складываются.

Заметим, что в задаче не требуется приведение примера такого числа. Достаточно доказать, что никакая цифра, кроме 6, последней оказаться не может.

10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пе-

ресекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω. (*Л. Емельянов*)

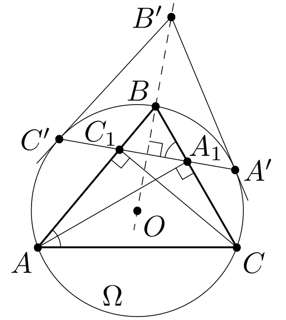

Рис. 2

Решение. Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^\circ$, точки A, C_1, A_1 и C лежат на окружности с диаметром AC, значит, $\angle BA_1C_1 = 180^\circ - \angle CA_1C_1 = \angle BAC$ (см. рис. 2). Тогда $\angle BA_1C_1 = \angle BA_1C' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC'} + \overset{\frown}{CA'})$ как угол между хордами. С другой стороны, $\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{CA'})$ как вписанный угол; значит, дуги BA' и BC' равны. Поэтому и отрезки BA' и BC' равны. Наконец, отрезки касательных $B'A'$ и $B'C'$ также равны, и значит, точки B' и B лежат на серединном перпендикуляре к хорде $A'C'$ окружности Ω. Центр окружности Ω также лежит на этом серединном перпендикуляре.

Комментарий. Доказано равенство дуг или отрезков BA' и BC' (или эквивалентное утверждение, например, $OB \perp A'C'$) — 4 балла.

Замечено, что OB' — серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$ — 1 балл.

Замечено, что OB' — серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$, и что для решения задачи достаточно доказать равенство дуг или отрезков BA' и BC' (при этом равенство указанных дуг или отрезков не доказано) — 2 балла.

10.3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой. *(Н. Агаханов)*

Первое решение. Пусть a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 — соответственно пары корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$. Рассмотрим трёхчлен $S(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$. Его значения в точках c_1 и c_2 совпадают со значениями в этих же точках трёхчлена $P(x) + Q(x)$, так как $R(c_1) = R(c_2) = 0$. Значит, из условия следует, что $S(c_1) = S(c_2)$. Аналогично, $S(a_1) = S(a_2)$ и $S(b_1) = S(b_2)$. Но квадратичная функция принимает равные значения в разных точках только тогда, когда эти точки симметричны относительно абсциссы вершины изображающей её параболы. Значит, пары точек a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 симметричны относительно одной и той же точки — абсциссы $x = d$ вершины параболы $y = S(x)$. Это и означает, что $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 2d$.

Второе решение. Пусть $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ — соответственно пары корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$. Обозначим через $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$ и $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ абсциссы вершин парабол — графиков функций $y = P(x)$, $y = Q(x)$, $y = R(x)$. Следующая лемма очевидно вытекает из свойств квадратичной функции.

Лемма. *Пусть f — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, $x = k$ — абсцисса вершины параболы $y = f(x)$, и числа $k_1 < k_2$ таковы, что $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ (иначе говоря, точки k_1 и k_2 симметричны относительно точки k). Тогда для всех $x \in [k_1, k_2)$ выполнено неравенство $f(k_2) \geqslant f(x)$, причем равенство достигается только при $x = k_1$.*

Пусть теперь для определенности c — наибольшее из чисел a, b, c, то есть $c \geqslant a$, $c \geqslant b$. Пусть точка c_1' симметрична c_2 относительно a, то есть $c_1' = 2a - c_2 = 2a - (2c - c_1) = c_1 - 2(c - a)$. Тогда $c_1' \leqslant c_1 < c_2$. Согласно лемме, $P(c_2) \geqslant P(c_1)$, причем неравенство обращается в равенство только в случае $c_1' = c_1$, то есть при $a = c$.

Аналогично доказываем, что $Q(c_2) \geqslant Q(c_1)$, причем неравенство обращается в равенство только при $b = c$. Значит,

$P(c_2) + Q(c_2) \geqslant P(c_1) + Q(c_1)$, причем равенство достигается только в случае $a = b = c$. Отсюда следует утверждение задачи.

Замечание. Условие положительности старших коэффициентов многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ существенно, так как иначе суммы $P(x) + Q(x)$, $P(x) + Q(x) + R(x)$ и т.п. могли оказаться линейными или постоянными функциями.

Комментарий. Рассмотрена сумма $S(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$ и показано, что значения $S(x)$ в корнях любого из данных трёхчленов одинаковы — 4 балла.

10.4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$? *(Р. Женодаров)*

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем, что для любого n найдутся n больших множеств, индукцией по n. При $n = 1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1 + 2013 > 1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, где $k_1 < \ldots < k_n$. Тогда число $k_n + 2013$ не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1} + 2013 > k_n + 2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1} > k_n$.

Пусть $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014} + 2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d \geqslant k_{2014} + 2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1}, \ldots, A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

Второе решение. Мы будем пользоваться определением большого множества из первого решения.

Докажем сначала, что имеется бесконечно много больших множеств. Предположим противное, тогда найдется такой номер t (считаем $t > 1$), что каждое из множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ состоит из одного элемента. Итак, объединение множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ есть множество $\{t + 2013, t + +2014, \ldots\}$. Тогда объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{t-1}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, t+2012\}$. Но сумма элементов в этих множествах должна быть равна $2014+2015+\ldots+(t+2012)$, что меньше, чем сумма всех чисел в множестве $\{1, 2, \ldots, t + 2012\}$. Противоречие показывает, что наше утверждение верно.

Сумма чисел каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ не превосходит $N + 2013$, значит все множества $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N + 2013\}$. Так как имеется бесконечно много больших множеств, то зафиксируем такой номер N, что среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ хотя бы 2014 больших. Тогда объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ содержит не менее $N + 2014$ элементов (они попарно не пересекаются) — противоречие.

Комментарий. В предположении, что нужное разбиение существует, доказано, что множеств, состоящих из двух или более элементов, бесконечное число — 3 балла.

Задача решена в предположении, что в искомом разбиении бесконечное число больших множеств (но эта бесконечность в работе не доказана) — 3 балла.

11 класс

11.1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. 000, 250, 500 или 750.

Решение. Пусть a, b, c — данные числа. По условию, числа $a + b - c$, $b + c - a$ и $c + a - b$ делятся на 10. Значит, на 10 делится и сумма этих чисел, равная $a+b+c$. С другой стороны, из равенства $a+b+c = (a+b-c)+2c$ и условия задачи следует, что последняя цифра суммы всех трёх чисел равна последней цифре числа $2c$. Значит, число c оканчивается на 5 или на 0. Аналогично, на 0 или на 5 оканчиваются числа a и b.

Наконец, поскольку сумма $a+b+c$ чётна, то и одно из чисел a, b, c также чётно. Итак, одно из этих чисел делится на 10, а два остальных — на 5. Тогда произведение делится на 250, а значит, может оканчиваться лишь на 250, 500, 750 или 000. Осталось привести примеры троек чисел, удовлетворяющие условиям, дающие данные последние цифры: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$; $5 \cdot 5 \cdot 10 = 250$; $5 \cdot 5 \cdot 20 = 500$; $5 \cdot 5 \cdot 30 = 750$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведены 4 примера, показывающие, что произведение может оканчиваться на каждое из чисел 000, 250, 500 и 750, дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

Приведены только три из четырёх таких примеров, дальнейшие продвижения отсутствуют — 1 балл.

Доказано только, что все три числа делятся на 5 — 2 балла. Если, кроме этого, доказано, что одно из них делится на 10 — ещё 1 балл.

Доказано, что произведение делится на 250 (или эквивалентное утверждение) и приведены лишь примеры, показывающие, что три из возможностей 000, 250, 500 и 750 реализуются — 5 баллов.

11.2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. *(Н. Агаханов)*

Решение. Пусть a_1 и a_2 — корни трёхчлена $P(x)$, а b_1 и b_2 — корни трёхчлена $Q(x)$; тогда $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)$ и $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)$. Поэтому условие задачи принимает вид

$$(b_1 - a_1)(b_1 - a_2) + (b_2 - a_1)(b_2 - a_2) = \\ = (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) + (a_2 - b_1)(a_2 - b_2).$$

Перенося все слагаемые в одну часть, мы получаем

$$(b_1 - a_1)(b_1 - a_2 + a_1 - b_2) + (b_2 - a_2)(b_2 - a_1 + a_2 - b_1) = 0,$$

то есть $(b_1 + a_2 - a_1 - b_2)(a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = 0$, или $(b_1 - b_2)^2 - (a_1 - a_2)^2 = 0$. Это значит, что $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$.

Мы доказали, что расстояния между корнями трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны. Но квадраты этих расстояний как раз и равны, согласно формуле корней квадратного уравнения, дискриминантам этих трёхчленов.

Комментарий. Доказано только, что $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$ — 5 баллов.

Замечено, что для решения задачи достаточно доказать равенство $|b_1 - b_2| = |a_2 - a_1|$ — 1 балл.

11.3. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$? *(Р. Женодаров)*

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем индукцией по n, что существуют хотя бы n больших множеств. При $n = 1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1 + 2013 > 1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного

перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$, где $k_1 < \ldots < k_n$. Тогда число $k_n + 2013$ не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1} + 2013 > k_n + 2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1} > k_n$.

Пусть $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014} + 2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d \geqslant k_{2014} + 2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1}, \ldots, A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

Второе решение. Мы будем пользоваться определением большого множества из первого решения.

Докажем сначала, что имеется бесконечно много больших множеств. Предположим противное, тогда найдется такой номер t (считаем $t > 1$), что каждое из множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ состоит из одного элемента. Итак, объединение множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ есть множество $\{t + 2013, t + 2014, \ldots\}$. Тогда объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{t-1}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, t + 2012\}$. Но сумма элементов в этих множествах должна быть равна $2014 + 2015 + \ldots + (t + 2012)$, что меньше, чем сумма всех чисел в множестве $\{1, 2, \ldots, t + 2012\}$. Противоречие показывает, что наше утверждение верно.

Сумма чисел каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ не превосходит $N + 2013$, значит все множества $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N + 2013\}$. Так как имеется бесконечно много больших множеств, то зафиксируем такой номер N, что среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ хотя бы 2014 больших. Тогда объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ содержит не менее $N + 2014$ элементов (они попарно не пересекаются) — противоречие.

Комментарий. В предположении, что нужное разбиение существует, доказано, что множеств, состоящих из двух или более элементов, бесконечное число — 3 балла.

Задача решена в предположении, что в искомом разбиении бесконечное число больших множеств (но эта бесконечность в работе не доказана) — 3 балла.

11.4. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP. *(Ф. Ивлев)*

Первое решение. Пусть S — середина BP, O — центр окружности Ω. Тогда O — середина отрезка PQ, а S — проекция O на BP. Заметим, что $QA = QC$, так как Q — середина дуги AC. Равнобедренные треугольники AQC и POC подобны, так как $\angle QAC$ и $\angle OPC$ опираются на одну дугу QC. Прямоугольные треугольники AQM и POS подобны, так как $\angle QAM$ и $\angle OPS$ опираются на одну дугу QB. Из доказанных подобий следует, что $\frac{AM}{PS} = \frac{AQ}{PO} = \frac{AC}{PC}$.

Поскольку $\angle MAC = \angle SPC$ (они опираются на одну дугу BC), получаем, что треугольники AMC и PSC подобны. Отсюда следует, что углы BMC и BSC равны как смежные с соответственными углами в этих треугольниках. Отсюда и следует, что точки B, C, M, S лежат на одной окружности.

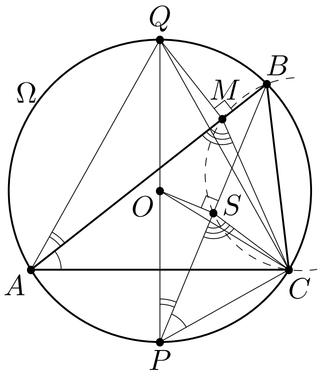

Рис. 3

Второе решение. Пусть K — точка, симметричная точке C относительно прямой BQ. Поскольку дуги AQ и CQ равны, прямая BQ является внешней биссектрисой угла ABC; значит, точка K лежит на прямой AB. Далее, из симметрии получаем $QK = QC = QA$. Значит, треугольник QAK равнобедренный, и его высота QM является медианой: $AM = MK$.

Поскольку треугольник BCK равнобедренный ($BC = CK$), имеем $\angle BKC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle PBC$. Кроме того, $\angle BPC =$

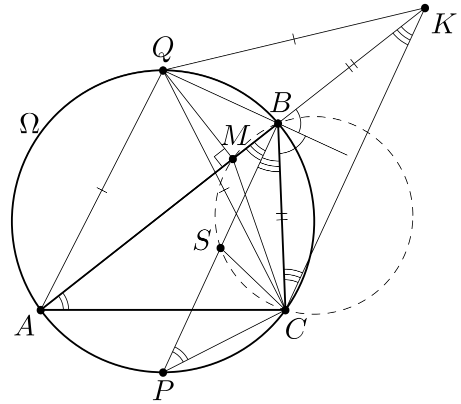

Рис. 4

$= \angle BAC$ как опирающиеся на одну дугу. Значит, треугольники CAK и CPB подобны по двум углам. Обозначим через S середину отрезка BP. Тогда углы CSB и CMK — соответственные в этих подобных треугольниках; значит, они равны, то есть $\angle CSB = \angle CMB$. Это и означает, что точки C, S, M, B лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что треугольники AQM и POS подобны, или доказано, что треугольники AQC и POC подобны — 1 балл.

Доказаны оба этих подобия — 3 балла.

На луче AB найдена точка K такая, что $BK = BC$ и $QA = QK$ (или $MA = MK$) — 2 балла.