

Материалы для проведения  
регионального этапа  
**XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ**

2014–2015 учебный год

Первый день

2–3 февраля 2015 г.

Сборник содержит материалы для проведения III этапа ХLI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, К. А. Кноп, А. Н. Магазинов, А. Д. Матушкин, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, **В. А. Сендеров**, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.



## **Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2014–2015 учебного года.**

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 2 и 3 февраля 2015 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи с тем, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с рекомендацией Министерства образования и науки РФ. Именно, каждый тур может начинаться только в интервале от 5.00 до 9.00 **по московскому времени**.

Организаторы регионального этапа в том или ином субъекте РФ могут сами установить время начала каждого тура, но оно не должно выходить за пределы указанного интервала.

Рекомендуется итоговую проверку, разбор/показ, апелляции планировать в отдельный день.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

*Желаем успешной работы!*

*Авторы и составители сборника*

## УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 9 класс

- 9.1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого  $k$  из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем  $k$  это могло случиться?

(О. Подлипский)

**Ответ.** 2013.

**Решение.** Пусть  $A$  и  $B$  — люди, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами, соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу,  $A$  — рыцарь, а  $B$  — лжец. Но, если бы они сказали вторую фразу, то  $A$  солгал бы, а  $B$  сказал бы правду; это невозможно. Значит,  $A$  и  $B$  сказать вторую фразу не могут, и  $k \leq 2013$ .

Покажем, что ситуация, когда оставшиеся 2013 человек смогут сказать вторую фразу, возможна. Пусть сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами  $1, 2, 3, \dots, 2015$ ; при этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные — лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую — все, кроме людей с карточками 1 и 2015.

**Замечание.** Существуют и другие примеры распределения карточек, при которых 2013 человек могут сказать вторую фразу.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример рассадки людей, при которой  $k$  может быть равно 2013 — 3 балла.

Доказано только, что  $k \leq 2013 - 4$  балла.

Доказано только, что  $k \leq 2014 - 1$  балл.

Утверждается, что люди с наибольшим и наименьшим чис-

лом не могут сказать вторую фразу, но это утверждение никак не обосновано — снимается 1 балл.

- 9.2. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел? (О. Подлипский)

**Ответ.** 4.

**Решение.** Среди пяти подряд идущих натуральных чисел могут найтись 4 интересных числа. Например, подойдут числа 199, 200, 201, 202, 203 (с суммами цифр **19, 2, 3, 4** и **5**).

Докажем теперь, что все 5 чисел не могут оказаться интересными. Среди наших пяти чисел есть три, лежащих в одном десятке. Тогда их суммы цифр — последовательные числа; значит, все они не могут одновременно быть простыми.

**Замечание 1.** Существуют и другие примеры пяти последовательных чисел, четыре из которых интересны. Более того, число, делящееся на 10, также может стоять на другом месте, как, например, в пятёрке 197, 198, 199, 200, 201. Однако в любом таком примере суммы цифр двух из чисел пятёрки должны быть равны 2 и 3.

**Замечание 2.** Доказать, что пять подряд идущих чисел не могут быть интересными, можно и по-другому. Среди наших чисел по крайней мере два имеют четную сумму цифр (даже если есть переход «через десяток»). Но обе этих суммы не могут равняться 2, поскольку сумму цифр 2 имеют только числа вида  $10 \dots 010 \dots 0$  и  $20 \dots 0$ , а два таких числа не могут встретиться среди 5 подряд идущих натуральных чисел.

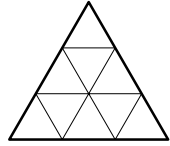
**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример пяти чисел подряд, четыре из которых интересны — 3 балла.

Приведён лишь пример пяти последовательных чисел, среди которых меньше 4 интересных — 0 баллов.

Доказано, что не существует пяти интересных чисел подряд — 3 балла.

- 9.3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа  $n, n + 1, \dots, n + 8$ . При каких  $n$  он сможет это сделать? (О. Дмитриев, Р. Женодаров)



**Ответ.** Только при  $n = 2$ .

**Решение.** Покажем, что числа  $1, 2, \dots, 9$  получить нельзя. Сумма исходных чисел равна 0, а за каждый ход сумма чисел изменится на 2. Значит, она всегда чётна, то есть числа  $1, 2, \dots, 9$  с суммой 45 получить нельзя.

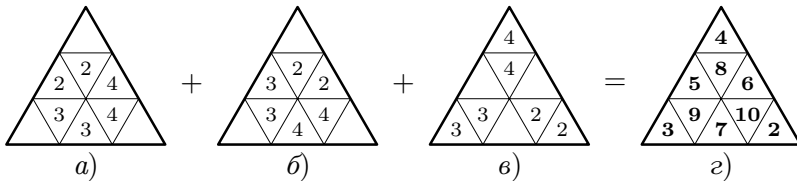


Рис. 1

Набор  $2, 3, \dots, 10$  получить можно. Один из возможных способов представлен на рис. 1а)–г), где одинаковые числа показывают, к каким двум клеткам и сколько раз применяется операция прибавления единицы. Итоговый результат показан на рис. 1г).

Покажем, наконец, что при  $n > 2$  нельзя получить набор чисел  $n, n + 1, \dots, n + 8$ . Предположим противное. Раскрасим клетки в шахматном порядке так, как показано на рис. 2. Тогда при каждом ходе одна из выбранных клеток — белая, а другая — чёрная.

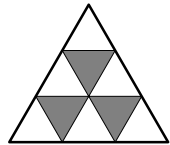


Рис. 2

Значит, суммы чисел в белых и чёрных клетках изменяются на одно и то же число. Так как в начале эти суммы равны, они окажутся равными и в конце. С другой стороны, сумма чисел в чёрных клетках окажется не больше, чем  $(n + 8) + (n +$

$+ 7) + (n + 6) = 3n + 21$ , а сумма чисел в белых — не меньше, чем  $n + (n + 1) + \dots + (n + 5) = 6n + 15$ . При  $n > 2$  имеем  $6n + 15 = (3n + 15) + 3n > 3n + 15 + 6 = 3n + 21$ ; значит, требуемые суммы равными не будут. Противоречие.

**Комментарий.** Только ответ — 0 баллов.

Показано, как получить числа 2, 3, ..., 10 — 2 балла.

Доказано, что при  $n \neq 2$  требуемое невозможно — 5 баллов.

Доказано только, что при  $n = 1$  (или при всех нечётных  $n$ ) требуемое невозможно — 2 балла вместо 5.

Доказано только, что при  $n \geq 3$  требуемое невозможно (то есть упущен или неверно разобран случай  $n = 1$ ) — 4 балла вместо 5.

Если в решении считается (и существенно используется), что единицы только прибавляются, а не вычитаются — за эту часть решения ставится не более 2 баллов.

Баллы за приведённый пример при  $n = 2$  и за доказательство невозможности некоторых других случаев складываются.

- 9.4. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы угла  $ABC$  и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую  $AC$  в точках  $B_1$  и  $B_2$  соответственно. Из точек  $B_1$  и  $B_2$  провели касательные к окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , отличные от прямой  $AC$ . Они касаются этой окружности в точках  $K_1$  и  $K_2$  соответственно. Докажите, что точки  $B$ ,  $K_1$  и  $K_2$  лежат на одной прямой. (Л. Емельянов)

**Решение.** Обозначим через  $I$  центр окружности  $\omega$ , вписанной в треугольник  $ABC$ . Пусть  $D$  — точка касания  $\omega$  со стороной  $AC$  (см. рис. 3). Так как прямая  $BB_1$  проходит через центр  $\omega$ , точки  $D$  и  $K_1$  симметричны относительно прямой  $BB_1$ , то есть  $BI$  — биссектриса угла  $K_1BD$ . Докажем, что  $BI$  также является биссектрисой угла  $K_2BD$ ; отсюда будет следовать требуемое.

Рассмотрим окружность  $\Gamma$ , построенную на  $B_2I$  как на диаметре. Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла треугольника перпендикулярны, а  $B_2K_2$  и  $B_2D$  касаются  $\omega$ , имеем  $\angle B_2BI = \angle B_2K_2I = \angle B_2DI = 90^\circ$ . Значит, точки  $I$ ,  $B$ ,  $D$  и  $K_2$  лежат на окружности  $\Gamma$ . Радиусы  $ID$  и  $IK_2$  окружности  $\omega$  равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги окружности  $\Gamma$ ;



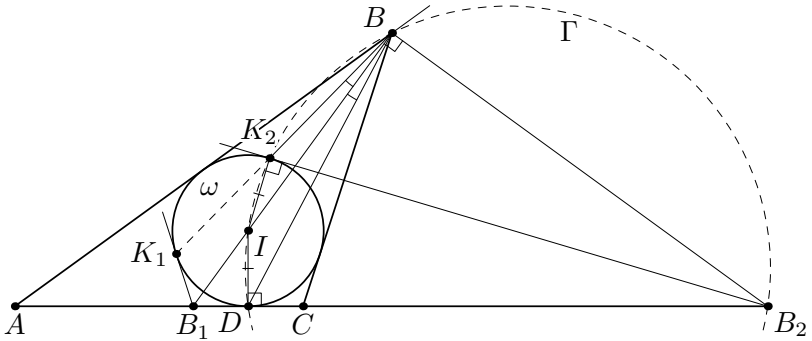


Рис. 3

следовательно,  $\angle IBD = \angle IBK_2$ , то есть  $BI$  — биссектриса угла  $K_2BD$ . Это нам и требовалось.

**Комментарий.** В обозначениях, введённых в решении, доказано, что точки  $I$ ,  $K_2$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной окружности — 3 балла.

## 10 класс

10.1. Целые числа  $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$  таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что  $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$ . (В. Сендеров)

**Решение.** Если какое-то из чисел  $x_i$  равно 0, утверждение задачи очевидно. Если одно из  $x_i$  равно  $\pm 1$ , то  $a = 0$ , так что утверждение также верно. В противном случае при каждом  $i$  число  $(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - x_i^2$  отрицательно. С другой стороны, из условия имеем

$$0 \leq a^2 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) \cdot (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Но в правой части стоит отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел вида  $(1 - x_i)(1 + x_i)$ ). Противоречие.

**Замечание 1.** В случае, когда все  $x_i$  отличны от 0 и  $\pm 1$ , можно строить рассуждения и по-другому. Например, поскольку числа  $1 + x_i$  и  $1 - x_i$  имеют разные знаки, среди 26 выражений  $(1 - x_1), \dots, (1 - x_{13}), (1 + x_1), \dots, (1 + x_{13})$  нечетное число отрицательных.

**Замечание 2.** Из условия не следует, что  $a = 0$  (даже в случае, если не все  $x_i$  — нули). Более того, неверно, что при  $a \neq 0$  все ненулевые  $x_i$  разбиваются на пары противоположных. Например, если положить  $x_1 = -3, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 11$  и  $x_5 = x_6 = \dots = x_{13} = 0$ , то

$$(1 - 3)(1 + 7)(1 + 8)(1 + 11) = (1 + 3)(1 - 7)(1 - 9)(1 - 11) = -1920.$$

**Комментарий.** Верно рассмотрен только случай, когда модуль хотя бы одного из  $x_i$  не превосходит единицы — 1 балл.

10.2. На плоскости отметили все вершины правильного  $n$ -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого  $n$ -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге  $n$ -угольник разбился на  $n$  треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких  $n$  по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке? (И. Рубанов)

**Ответ.** При нечётных  $n$ .

**Решение.** Пусть  $A_1A_2 \dots A_n$  — данный многоугольник, а  $S$  — его центр.

Покажем сначала, что, если  $n$  чётно, то существуют две различные расстановки, при которых соответствующие тройки будут одинаковыми. Тогда Петя не сможет восстановить исходные числа. В первой расстановке поставим в  $S$  число 2, а во все вершины  $n$ -угольника — по 1. Во второй расстановке поставим в  $S$  число 1, а в вершины  $n$ -угольника — единицы и двойки чередующимся образом. Для обеих расстановок все тройки будут «1, 1, 2».

Осталось показать, что при нечётном  $n$  Петя сможет восстановить все числа. Отметим, что число из вершины  $A_i$  пишется в двух тройках, а число из  $S$  — в  $n$  тройках. Значит, только число из  $S$  будет встречаться во всех тройках нечётное число раз, и Петя сможет его определить. После этого для каждой пары соседних вершин  $n$ -угольника он знает, какие два числа написаны в них. Осталось по этим данным восстановить числа в вершинах. Заметим сразу, что если Петя сумеет восстановить, скажем, число в  $A_1$ , то затем из пары  $(A_1, A_2)$  он восстановит число в  $A_2$ , затем — в  $A_3$ , и т.д. Итак, ему достаточно восстановить число в одной вершине  $n$ -угольника.

Если в какой-то паре (скажем,  $(A_1, A_2)$ ) два числа равны, то Петя восстановит число в  $A_1$ . Пусть такой пары нет, а в вершинах  $(A_1, A_2)$  написаны числа  $a$  и  $b$ . Если в  $(A_2, A_3)$  написана не та же пара, то она пересекается с  $(a, b)$  по числу, написанному в  $A_2$ , и Петя восстановит это число. Итак, он не сможет восстановить число в вершине  $A_2$ , только если в  $(A_2, A_3)$  записана пара  $(a, b)$ . Аналогично, в  $(A_3, A_4)$  тоже должна быть записана эта же пара, иначе Петя сможет определить число в  $A_3$ , и т.д. Итак, Петя не сможет восстановить числа в вершинах  $n$ -угольника, только если числа  $a$  и  $b$  в этих вершинах чередуются; это невозможно, так как  $n$  нечётно.

**Замечание.** При чётном  $n$  есть и другие примеры расстановок чисел с одинаковыми тройками. Например, в обеих расстановках в  $S$  ставится 1, а в вершинах  $A_i$  чередуются 1 и 2

так, что в первом способе в вершине  $A_1$  находится число 1, а во втором — число 2.

**Комментарий.** Только ответ без каких-либо других существенных движений — 0 баллов.

При чётном  $n$  приведен пример двух разных расстановок чисел с одинаковыми тройками — 2 балла.

Для нечётного  $n$  показано с полным обоснованием, как по тройкам чисел на гранях восстановить числа в вершинах — 5 баллов.

При нечётном  $n$  показано только, как по тройкам чисел на гранях восстановить число в центре  $n$ -угольника — ставится 3 балла из 5 возможных за эту часть решения.

- 10.3. Пусть  $AL$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $AL$  пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $PLQ$ , касается стороны  $BC$ . (С. Берлов)

**Решение.** Заметим, что треугольники  $PLQ$  и  $PAQ$  симметричны относительно прямой  $PQ$ . Через точку  $A$  проведем касательную  $XY$  к окружности, на которой лежат точки  $A, B, C, P, Q$  (см. рис. 4). Для решения задачи достаточно доказать, что прямые  $XY$  и  $BC$  симметричны относительно прямой  $PQ$ . А поскольку точки  $A$  и  $L$  симметричны относительно прямой  $PQ$ , остается установить равенство углов  $\angle XAL$  и  $\angle BLA$ .

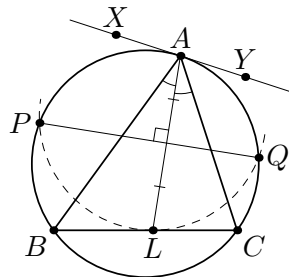


Рис. 4

Используя касание и теорему о внешнем угле треугольника, имеем  $\angle XAL = \angle XAB + \angle BAL = \angle ACB + \angle CAL = \angle ACL + \angle CAL = \angle BLA$ , что и требовалось.

**Комментарий.** Задача сведена к доказательству того, что прямые  $XY$  и  $BC$  симметричны относительно прямой  $PQ$  (или эквивалентного утверждения) — 3 балла.

Показано, что прямые  $BC$ ,  $PQ$  и касательная в точке  $A$  пересекаются в одной точке либо параллельны — 3 балла.

- 10.4. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению  $ab +$

$+bc + ca = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

(П. Козлов)

**Решение.** Заметим, что

$$a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab + ac + bc}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}.$$

Применяя неравенство о средних для чисел  $a$  и  $bc/a$ , получаем

$$a + \frac{1}{a} \geq b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2;$$

отсюда  $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$ . Аналогичным образом выводятся неравенства  $\sqrt{b + \frac{1}{b}} \geq \sqrt{c} + \sqrt{a}$  и  $\sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

**Комментарий.** Задача сведена к доказательству неравенства  $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$  (но это неравенство не доказано) — 1 балл.

Доказано только, что левая и правая части неравенства не больше (не меньше) одного и того же выражения — 0 баллов.

## 11 класс

11.1. Целые числа  $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$  таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что  $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$ . (В. Сендеров)

**Решение.** Если какое-то из чисел  $x_i$  равно 0, утверждение задачи очевидно. Если одно из  $x_i$  равно  $\pm 1$ , то  $a = 0$ , так что утверждение также верно. В противном случае при каждом  $i$  число  $(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - x_i^2$  отрицательно. С другой стороны, из условия имеем

$$0 \leq a^2 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) \cdot (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Но в правой части стоит отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел вида  $(1 - x_i)(1 + x_i)$ ). Противоречие.

**Замечание 1.** В случае, когда все  $x_i$  отличны от 0 и  $\pm 1$ , можно строить рассуждения и по-другому. Например, поскольку числа  $1 + x_i$  и  $1 - x_i$  имеют разные знаки, среди 26 выражений  $(1 - x_1), \dots, (1 - x_{13}), (1 + x_1), \dots, (1 + x_{13})$  нечетное число отрицательных.

**Замечание 2.** Из условия не следует, что  $a = 0$  (даже в случае, если не все  $x_i$  — нули). Более того, неверно, что при  $a \neq 0$  все ненулевые  $x_i$  разбиваются на пары противоположных. Например, если положить  $x_1 = -3, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 11$  и  $x_5 = x_6 = \dots = x_{13} = 0$ , то

$$(1 - 3)(1 + 7)(1 + 8)(1 + 11) = (1 + 3)(1 - 7)(1 - 9)(1 - 11) = -1920.$$

**Комментарий.** Верно рассмотрен только случай, когда модуль хотя бы одного из  $x_i$  не превосходит единицы — 1 балл.

11.2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере? (С. Волчёнков)

**Ответ.** 33.

**Решение.** Пусть на вечере было  $p$  супружеских пар и  $d$  детей (из условия,  $d \leq 10p$ ). Тогда каждый ребёнок состоял в  $(p - 1)(p - 2)$  тройках: маму можно было выбрать из одной из

$p - 1$  супружеских пар, а при зафиксированном выборе мамы папу можно было выбрать из одной из  $p - 2$  оставшихся пар. Значит, общее количество троек равно  $d \cdot (p - 1)(p - 2) = 3630$ . Поскольку  $d \leq 10p$ , получаем  $3630 \leq 10p^3$ , то есть  $p^3 \geq 363 > 7^3$ . Значит,  $p \geq 8$ .

Далее, число  $3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$  имеет два делителя  $p - 1$  и  $p - 2$ , отличающиеся на 1. Если один из этих делителей делится на 11, то другой даёт остаток 1 или 10 при делении на 11. Тогда он взаимно прост с 11, а значит, он делит  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  и при этом не меньше 10. Нетрудно видеть, что этим делителем может быть только 10; тогда  $p - 2 = 10$ ,  $p - 1 = 11$  и  $d = 3630/110 = 33$ .

Если же оба числа  $p - 2$  и  $p - 1$  не делятся на 11, то число  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  делится на их произведение; это противоречит тому, что  $p \geq 8$ .

**Комментарий.** Обоснованно получено равенство  $d(p - 1)(p - 2) = 3630 - 4$  балла.

- 11.3. Продолжения медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекают его описанную окружность в точках  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  соответственно. Оказалось, что площади треугольников  $ABC_0$ ,  $AB_0C$  и  $A_0BC$  равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  равносторонний. (А. Якубов)

**Решение. Лемма.** Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — различные точки на плоскости, причём прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Тогда  $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{BE}{DE}$ .

**Доказательство.** Пусть  $BH_B$  и  $DH_D$  — высоты в треугольниках  $ABC$  и  $ADC$  соответственно (см. рис. 5). Тогда  $BH_B \parallel DH_D$ , поэтому треугольники  $BH_BE$  и  $DH_DE$  подобны; отсюда  $\frac{BH_B}{DH_D} = \frac{BE}{DE}$ . С другой стороны,  $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BH_B}{2}$  и  $S_{ADC} = \frac{AC \cdot DH_D}{2}$ , откуда  $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{AC \cdot BH_B}{AC \cdot DH_D} = \frac{BH_B}{DH_D} = \frac{BE}{DE}$ , что и требовалось.  $\square$

Перейдем к решению задачи. Обозначим через  $M$  точку пересечения медиан  $\triangle ABC$ . Из леммы следует, что  $S_{AMB} = S_{AMC}$ ; из условия теперь получаем, что  $\frac{S_{AMB}}{S_{AC_0B}} = \frac{S_{AMC}}{S_{AB_0C}}$ . Опять применяя лемму, получаем  $\frac{MC_1}{C_1C_0} = \frac{MB_1}{B_1B_0}$ , откуда  $C_1B_1 \parallel C_0B_0 \parallel BC$ . Поскольку четырёхугольник  $BCB_0C_0$  впи-

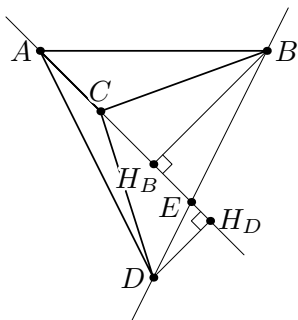


Рис. 5

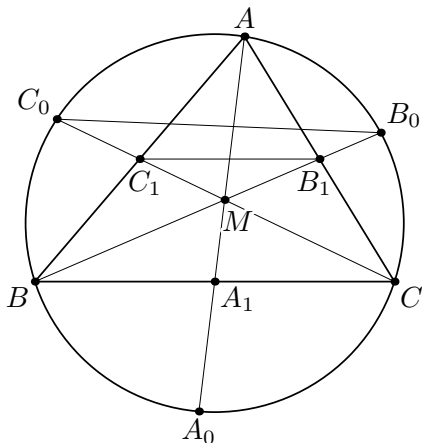


Рис. 6

сан, он является равнобокой трапецией или прямоугольником; в любом случае,  $BM = MC$ , то есть треугольник  $BMC$  — равнобедренный, и его медиана  $MA_1$  является и высотой. Значит, и в треугольнике  $ABC$  медиана  $AA_1$  является высотой, то есть  $AB = AC$ . Равенство  $AB = BC$  доказывается аналогично.

**Комментарий.** Доказано, что  $CB \parallel C_0B_0$  (или аналогичное утверждение для аналогичных точек) — 4 балла.

11.4. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению  $ab + bc + ca = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

(П. Козлов)

**Решение.** Заметим, что

$$a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab + ac + bc}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}.$$

Применяя неравенство о средних для чисел  $a$  и  $bc/a$ , получаем

$$a + \frac{1}{a} \geq b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2;$$

отсюда  $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$ . Аналогичным образом выводятся неравенства  $\sqrt{b + \frac{1}{b}} \geq \sqrt{c} + \sqrt{a}$  и  $\sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

**Комментарий.** Задача сведена к доказательству неравен-



ства  $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$  (но это неравенство не доказано) — 1 балл.

Доказано только, что левая и правая части неравенства не больше (не меньше) одного и того же выражения — 0 баллов.