Материалы для проведения муниципального этапа

XXXVIII МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

11 декабря 2011 г.

Долгопрудный, 2011

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Агаханов Н.Х., к.ф.-м.н. Подлипский О.К. (Московский физико-технический институт (государственный университет)). Задача 9.1 предложена Богдановым И.И.

Рецензенты: к.ф.-м.н. Богданов И.И., к.ф.-м.н. Трушин Б.В.

Компьютерный макет подготовил Богданов И.И.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, рекомендуем при проверке работ оценивать:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 11 декабря 2011 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов при условии, что количество набранных ими баллов превышает половину максимально возможного количества баллов, то есть не менее 18 баллов. Важно отметить, что как победителями, так и призерами олимпиады в каждой параллели (6–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов, поскольку расхождение результатов двух школьников в несколько баллов может отражать только умение одного из них более четко записывать решения задач. Однако, количество победителей и призеров не должно превышать 25 % от общего числа участников олимпиады.

Поэтому *рекомендуемая* схема определения победителей и призеров такова: победителями олимпиады становятся лучший школьник в параллели, а также участники, отставшие от него на 1–3 балла, при условии, что они набрали не менее 18 баллов. Участники, у которых сумма набранных баллов составляет 60 %–90 % от лучшего результата, становятся призерами олимпиады.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний…»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли…», «Может ли…» или «Существует ли…»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 6 класса, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 6–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

Желаем успешной работы!

В 2011–2012 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 27 января (1 тур) и 28 января (2 тур) 2012 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведён региональный тур олимпиады Эйлера. Согласно Положению о Всероссийской олимпиаде школьников, участниками регионального этапа являются:

– школьники, являющиеся победителями и призерами регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– победители и призеры муниципального этапа олимпиады текущего года.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Для формирования списков участников регионального этапа олимпиады и олимпиады Эйлера просьба направить копии списков победителей и призеров по 8–11 классам в электронном виде в Оргкомитет олимпиады по адресу `mosoblmath2011@mail.ru`.

Условия и решения задач

6 класс

6.1. Дедушка старше внука в 31 раз. Через сколько лет он будет старше внука в 7 раз, если известно, что дедушке больше 50, но меньше 90 лет?

Ответ. Через 8 лет.

Решение. Возраст дедушки делится на 31. Но единственное такое число, большее 50 и меньшее 90 — это 62. Значит, дедушке 62 года, а внуку 2 года. Через x лет дедушке будет $x+62$ года, а внуку $x+2$ года. Если при этом он будет старше внука в 7 раз, то $x+62=7(x+2)$, откуда $x=8$.

Комментарий. Написано, что возраст дедушки 62 года — 3 балла.

6.2. В строку выписали все числа от 100 до 2000: 100101102103…199819992000. Сколько раз в выписанном ряду цифр четыре подряд идущие цифры образуют число 2011? Напишите, как получились эти числа 2011. (Например, число 210 можно получить из чисел 102 и 103: 10**<u>210</u>**3)

Ответ. Два раза: из чисел 1120 и 1121: 11**<u>2011</u>**21, а также из чисел 1201 и 1202: 1**<u>2011</u>**202.

Решение. Число не может начинаться с цифры 0. Поэтому число 2011 может образоваться из частей двух чисел n, и $n+1$, где n оканчивается либо цифрами 20, либо цифрами 201. В первом случае $n+1$ начинается с цифр 11, во втором — с цифры 1, что и дает ответы.

Комментарий. Указан один ответ — 3 балла, оба ответа — 7 баллов.

Обоснования, что других ответов нет, в этой задаче не требуется.

6.3. Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие — всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Решение. Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой — лжет. Пусть следующий по кругу за П — шестиклассник К. Тогда в паре П — К также один говорит правду, а другой — лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь — чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

6.4. Из клетчатого квадрата 7×7 по границам клеток вырезали равное количество квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4. Какое наибольшее количество этих фигурок могло быть вырезано?

Ответ. 12.

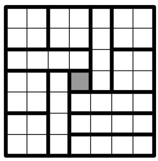

Рис. 1

Решение. Как квадрат, так и прямоугольник, состоят из 4 клеток. Поэтому количество вырезанных фигур не больше, чем $49/4$, то есть не больше 12. Фигур обоих типов поровну, поэтому квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4 не более, чем по 6. На рис. 1 показано, как можно вырезать из квадрата по 6 квадратов 2×2 и прямоугольников 1×4.

Комментарий. Доказано только, что фигурок не больше двенадцати — 3 балла.

Приведен только пример размещения 12 фигурок — 6 баллов.

6.5. На городской олимпиаде по математике каждому участнику присваивается шифр — произвольное число, оканчивающееся номером класса, в котором он учится. В олимпиаде по 6 и 7 классам приняли участие 75 детей, и оказалось, что сумма шифров шестиклассников равна сумме шифров семиклассников. На следующий год в олимпиаде по 7 и 8 классам приняли участие эти же 75 ребят. Могли ли суммы шифров этих теперь уже семи- и восьмиклассников опять оказаться равными? Обоснуйте свой ответ. (Шифры следующего года не связаны с шифрами предыдущего.)

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что такое могло случиться. Сумма шифров шестиклассников — это сумма чисел, оканчивающихся на 6, то есть четных чисел. Поэтому она четна. Тогда и сумма шифров семиклассников в первый год — четное число. Но это сумма нечетных чисел (оканчивающихся на 7), поэтому она могла быть четной, только если количество слагаемых четно. Значит, в первый год количество семиклассников четно, следовательно, на второй год количество восьмиклассников четно, а количество семиклассников нечетно (их общее количество 75 — нечетное число). Но тогда на второй год сумма шифров семиклассников — нечетное число (сумма нечетного числа нечетных слагаемых), а сумма шифров восьмиклассников — четное число, как сумма четных чисел (оканчивающихся на 8). Значит, эти суммы не могли быть равны. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что шестиклассников нечетное количество (или семиклассников четное) — 3 балла.

7 класс

7.1. Укажите наименьшее натуральное число, делящееся на 25, сумма цифр которого также делится на 25. (Объяснения, почему это число наименьшее, не требуются.)

Ответ. 4975.

Решение. Числа, делящиеся на 25, оканчиваются цифрами 00, 25, 50 или 75. Для того, чтобы искомое число было меньше, оно должно иметь суму цифр, равную 25 и оканчиваться на цифры, имеющие большую сумму, то есть на 75. Тогда сумма остальных цифр искомого числа равна $25 - 7 - 5 = 13$. Значит, число четырехзначно и оно меньше, если его первая цифра меньше, а вторая больше, то есть вторая цифра равна 9. Тогда первая цифра равна 4.

Комментарий. Угаданный правильный ответ в этой задаче оценивается в 7 баллов.

7.2. В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, — это 24.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 3 балла.

Доказано, что количество учеников в классе делится на 3 — 2 балла.

Доказано, что количество учеников в классе делится на 4 — 2 балла.

7.3. Для нескольких точек, расположенных на прямой, вычисляются расстояния между каждыми двумя из них (например, для четырёх точек таких расстояний будет шесть). Отметьте на прямой восемь точек так, чтобы расстояние между крайними точками было равно 7, а среди расстояний между точками ровно три раза встречалось расстояние 1, ровно два раза — расстояние 2, ровно пять раз — расстояние 3.

Решение.

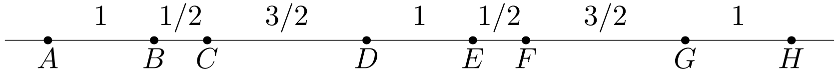

Рис. 2

Пусть A, B, C, D, E, F, G, H — подряд идущие отмеченные точки. Подходит, в частности, следующий пример: $AB = 1$, $BC = 1/2$, $CD = 3/2$, $DE = 1$, $EF = 1/2$, $FG = 3/2$, $GH = 1$ (см. рис. 2).

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой правильный пример в этой задаче оценивается в 7 баллов.

7.4. За круглым столом сидит 11 человек — лжецов и рыцарей (рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжет). Каждому из них раздали по две карточки. Известно, что карточки только синие и красные. Каждый сказал: «У меня одноцветные карточки». После этого каждый передал одну из своих карточек соседу справа. Могли ли все после этого сказать: «У меня разноцветные карточки»?

Ответ. Не могли.

Решение. Рассмотрим любого из сидящих за столом. Он изменил ответ после того, как отдал одну карточку и получил другую. Поэтому вне зависимости от того, является он рыцарем или лжецом, он отдал карточку одного цвета, а получил другого. Итак, цвета переданных карточек чередуются, и поэтому их количество должно быть четным. Однако 11 — число нечетное, поэтому описанная в условии ситуация невозможна.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

7.5. В волейбольном турнире каждая из шести участвовавших в нем команд сыграла с каждой по одному разу, и команды разбились на группы по количеству набранных очков: в первую вошли все команды с наибольшим количеством очков, ..., в последнюю — с наименьшим. Оказалось, что для каждой группы входящие в нее команды набрали разное количество очков в играх между собой. Какое наименьшее количество очков могла набрать команда первой группы? (В волейболе ничьих не бывает, за победу даётся 1 очко, за поражение — 0 очков.)

Ответ. 3 очка.

Решение. Всего в турнире было проведено 15 игр. Поэтому, если бы победитель набрал не больше 2 баллов, то всего в турнире командами было бы одержано не более $2 \times 6 = 12$ побед, что означало бы, что было сыграно не больше 12 игр. Значит, у победителя не меньше 3 побед.

Номер команды	1	2	3	4	5	6	Сумма очков
1	$\times$	1	1	1	0	0	3
2	0	$\times$	1	1	1	0	3
3	0	0	$\times$	1	1	1	3
4	0	0	0	$\times$	1	1	2
5	1	0	0	0	$\times$	1	2
6	1	1	0	0	0	$\times$	2

Рис. 3

Пример турнира, в котором победитель набрал 3 очка, приведён на рис. 3.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что у победителя не меньше 3 побед — 4 балла.

Приведен любой правильный пример турнира — 3 балла.

8 класс

8.1. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 2013.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть $y-x-1 = 2011$ или $y-x = 2012$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy-y+x-1$. Заметим, что $xy-y+x-1 = xy-(y-x)-1 = xy-2012-1 = xy-2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

Комментарий. Верный ответ без обоснования (или разобранный пример какой-то пары чисел) — 3 балла.

Несущественная арифметическая ошибка при правильном решении — снимать не более 2 баллов.

8.2. От шоссе к четырем поселкам A, B, C, D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге-шоссе-дороге от A до B равен 9 км, от A до C — 13 км, от B до C — 8 км, от B до D — 14 км. Найдите длину такого пути от A до D.

Ответ. 19 км.

Решение. Пусть длина дороги от шоссе до поселка B равна b. Путь от A до C можно заменить на более длинный — через поселок B. Он длиннее на удвоенный путь от шоссе до B. Значит, $2b = 9 + 8 - 13$, откуда $b = 2$.

Теперь заменим путь от A до D более длинным — через поселок B. Его длина равна $9 + 14 = 23$. Значит, длина пути от A до D равна $23 - 2 \cdot 2 = 19$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Приведен пример длин всех дорог (без обоснования) — 3 балла.

8.3. Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1) = a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

Ответ. $a = b = c = 1$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть. Используем то, что $x^2(x-1) - x(x-1) = (x^2-x)(x-1) = x(x-1)^2$. Получим $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = 0$. Так как a, b, c — положительные числа, слева стоит сумма неотрицательных слагаемых. Их сумма равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Но это возможно только при $a = b = c = 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Ошибочным является рассуждения вида: «если $a^2 > a$, то $a^2(a-1) > a(a-1)$». Такое «доказательство» должно оцениваться в 0 баллов.

8.4. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

Ответ. Неверно.

Решение. Пусть вначале на доске написаны числа 1, 2 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Если из 9 в результате получился ноль, то вычитание производилось хотя бы девять раз. Значит, и из остальных чисел вычиталось хотя бы по девять единиц; значит, к 1 надо было сделать не меньше восьми прибавлений, а к двойке — не меньше семи. Итоговое количество ходов, таким образом, не меньше $9 + 8 + 7 = 24$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведен пример тройки чисел 1, 2, 9, но не приведено верное доказательство того, что в этом случае потребуется больше 23 ходов — 2 балла.

8.5. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $DE \parallel AC$. Оказалось, что биссектрисы углов AED и EDC пересекаются в точке F, лежащей на стороне AC. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, является центром окружности, описанной около треугольника EDF.

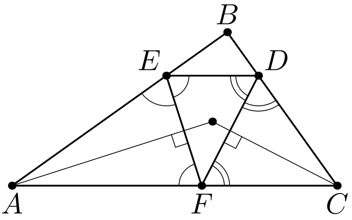

Рис. 4

Решение. Из параллельности следует, что $\angle AFE = \angle FED = \angle AEF$. Значит, треугольник AEF — равнобедренный: $AE = AF$. Значит, биссектриса угла EAF является медианой и высотой треугольника AEF, то есть серединным перпендикуляром к стороне EF. Аналогично, биссектриса угла DCF является серединным перпендикуляром к стороне DF.

Центр окружности, вписанной в треугольник ABC — это точка пересечения упомянутых биссектрис, а центр окружности, описанной около EDF — это точка пересечения упомянутых серединных перпендикуляров. Значит, эти точки совпадают.

Комментарий. Доказано, что треугольник AEF (или DCF) равнобедренный — 2 балла.

9 класс

9.1. Положительные числа a, b, c таковы, что точка $K(1;2)$ расположена вне параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определите, как эта точка расположена по отношению к параболе $y = cx^2 + bx + a$.

Ответ. Вне параболы.

Решение. Заметим, что при $x = 1$ обе параболы проходят через точку A с координатами $(1; a + b + c)$. Раз точка K лежит вне первой параболы, и ветви первой параболы направлены вверх, то она лежит ниже точки A (то есть $2 < a+b+c$). Но так как ветви второй параболы также направлены вверх и точка K лежит ниже точки A параболы, то K лежит и вне второй параболы.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

9.2. Из произведения трех последовательных натуральных чисел вычли их сумму и получили нечетное число N. Докажите, что число N является произведением каких-то трех последовательных нечетных чисел.

Решение. Пусть $m - 1, m, m + 1$ — исходные числа. Тогда $N = (m - 1)m(m + 1) - ((m - 1) + m + (m + 1)) = m(m^2 - 1) - 3m = m(m^2 - 4) = (m - 2)m(m + 2)$. Числа $m - 2, m, m + 2$ либо последовательные четные, либо последовательные нечетные числа. Но так как N — нечетное, то и числа $m - 2, m, m + 2$ — нечетные, что и требовалось.

9.3. В классе больше 20, но меньше 30 учеников, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько учеников в классе?

Ответ. 25 учеников.

Решение. Пусть в классе x ребят младше Пети, тогда $2x$ ребят старше Пети. Итак, в классе $3x+1$ ребят. Пусть в классе y ребят старше Кати, тогда $3y$ ребят младше Кати. Итак, в классе $4y + 1$ ребят. Это означает, что число учеников в классе имеет вид $N = 3x + 1$ и $N = 4y + 1$, откуда $N - 1 = 3x$ и $N - 1 = 4y$. Таким образом, число $N - 1$ делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное такое число между 19 и 29 — это 24. Значит, $N - 1 = 24$, откуда $N = 25$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 3 балла.

Доказано, что количество учеников в классе имеет вид $3x + 1$ при целом x — 2 балла.

Доказано, что количество учеников в классе имеет вид $4y + 1$ при целом y — 2 балла.

9.4. Точки A_1, B_1, C_1 — соответственно середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$. Докажите, что O_4 — точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

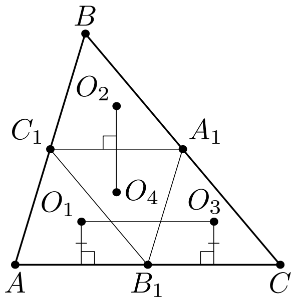

Рис. 5

Решение. Отметим, что треугольники AC_1B_1 и A_1B_1C равны (стороны каждого из них равны половинам сторон треугольника ABC). А в равных треугольниках расстояния от центров описанных окружностей до соответственных сторон одинаковы. Значит, точки O_1 и O_3 находятся на одинаковом расстоянии от стороны AC, откуда следует, что прямая O_1O_3 параллельна прямой AC, то есть она параллельна средней линии A_1C_1 треугольника ABC.

Центр описанной около треугольника окружности лежит на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Значит, точки O_2 и O_4 лежат на серединном перпендикуляре к общей стороне A_1C_1 треугольников A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$. Поэтому прямая O_2O_4 перпендикулярна прямой A_1C_1, а, значит, перпендикулярна прямой O_1O_3. Это означает, что точка O_4 лежит на высоте треугольника $O_1O_2O_3$, проведенной из вершины O_2. Аналогично, она лежит и на других высотах этого треугольника, то есть является точкой пересечения его высот. Утверждение доказано.

Комментарий. Доказано только, что треугольники AC_1B_1 и B_1A_1C равны — 0 баллов.

Доказано, что прямая O_1O_3 параллельна прямой AC — 3 балла.

Доказано, что O_2O_4 перпендикулярен AC (или A_1C_1) — 2 балла.

9.5. Внучка выкопала на огороде 45 репок, веса которых — все натуральные числа от 1 до 45. Могла ли внучка дать по 15 репок деду и бабке так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих репки ни положили на одну чашку весов дед и бабка — по одной каждый, внучка сможет положить на другую чашку весов одну или две свои репки так, чтобы весы уравновесились?

Ответ. Могла.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Пусть дед получил репки с весами $1, 4, 7, \ldots, 43$, бабка — с весами $2, 5, 8, \ldots, 44$, а у внучки остались репки с весами $3, 6, 9, \ldots, 45$ (иначе говоря, веса внучкиных репок делятся на 3, веса дедкиных дают остаток 1, а веса бабкиных — остаток 2 при делении на 3). Тогда сумма весов двух репок (бабки и деда) будет делиться на 3, и будет принимать значения от $1 + 2 = 3$ до $43 + 44 = 87 = 29 \cdot 3$. Веса от 3 до 45 внучка может уравновесить одной своей репкой, а веса от $48 = 45 + 3$ до $87 = 45 + 42$ — двумя репками.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример без обоснования — 3 балла.

10 класс

10.1. Парабола $y = ax^2$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение. Поскольку график пересекает прямые, $a > 0$. Заметим, что прямая $y = c$ $(c > 0)$ пересекает данную параболу в точках, симметричных относительно оси ординат, поэтому данные в условии отрезки имеют длины $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$, где x_1, x_2, x_3 — положительные корни уравнений $ax^2 = 1$, $ax^2 = 2$, $ax^2 = 3$. Значит, сумма квадратов длин первых двух отрезков равна $(2x_1)^2+(2x_2)^2 = 4\cdot\frac{1}{a}+4\cdot\frac{2}{a} = 4\cdot\frac{3}{a}$. Значит, эта сумма равна квадрату длины третьего отрезка. Утверждение доказано.

Комментарий. Обоснование обратной теоремы Пифагора не требуется.

10.2. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если к сумме этих чисел прибавить их произведение, то результат будет оканчиваться на 2011?

Ответ. Не существуют.

Решение. Пусть такие пять чисел существуют, и эти числа $N-2, N-1, N, N+1, N+2$. Заметим, среди пяти последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на 5. Значит, их произведение делится на 5. Сумма этих пяти чисел равна $5N$, то есть тоже делится на 5. Значит, если к сумме этих пяти чисел прибавить их произведение, то результат будет делиться на 5. Но число, заканчивающееся на 2011, на 5 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

10.3. Среди троек целых чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^3(a-1)+b^3(b-1)+c^3(c-1) = a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$, найдите тройку с наименьшей суммой.

Ответ. $(-1; -1; -1)$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть. Используем то, что $x^3(x-1) - x(x-1) = (x^3 - x)(x-1) = x(x^2-1)(x-1) = x(x+1)(x-1)^2$. Получим $a(a+1)(a-1)^2 + b(b+1)(b-1)^2 + c(c+1)(c-1)^2 = 0$.

Рассмотрим выражение вида $x(x+1)(x-1)^2$, где x — целое. Заметим, что выражение $x(x+1)$ отрицательно только при $-1 < x < 0$. То есть при всех целых x выполняется неравенство $x(x+1) \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $x = 0$ или $x = -1$. Также заметим, что $(x-1)^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $x = 1$. Поэтому при всех целых x выполняется неравенство $x(x+1)(x-1)^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается только при $x = -1$, $x = 0$ или $x = 1$.

Поэтому в равенстве $a(a+1)(a-1)^2 + b(b+1)(b-1)^2 + c(c+1)(c-1)^2 = 0$ слева стоит сумма неотрицательных слагаемых. Их сумма равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Это возможно только если целые числа a, b, c принимают значения -1, 1 или 0. Из всех таких троек тройка с наименьшей суммой — это $(-1; -1; -1)$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Утверждается без обоснования, что в подходящей тройке все числа равны -1, 0 или 1 — 1 балл.

10.4. На сторонах BC и BA треугольника ABC выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$. Биссектриса BL треугольника ABC пересекает отрезок A_1C_1 в точке K. Докажите, что $A_1K \cdot CL = C_1K \cdot AL$.

Решение. Треугольники AA_1B и CC_1B подобны по первому признаку ($\angle B$ — общий и $\angle BAA_1 = \angle BCC_1$). Поэтому $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$. По свойству биссектрисы угла треугольника, $\frac{A_1K}{C_1K} = \frac{BA_1}{BC_1}$ и $\frac{CL}{AL} = \frac{CB}{AB}$. Значит, $\frac{A_1K}{C_1K} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC} = \frac{AL}{CL}$. Отсюда и следует утверждение задачи.

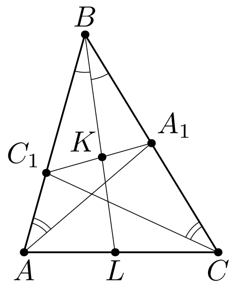

Рис. 6

Комментарий. Доказано подобие треугольников AA_1B и CC_1B (или треугольников A_1BC_1 и ABC) — 3 балла.

Доказано, что четырёхугольник ACA_1C_1 вписанный — 1 балл.

10.5. Внучка выкопала на огороде 45 репок, веса которых — все натуральные числа от 1 до 45. Могла ли внучка дать по 15 репок деду и бабке так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих репки ни положили на одну чашку весов дед и бабка — по одной каждый, внучка сможет положить на другую чашку весов одну или две свои репки так, чтобы весы уравновесились?

Ответ. Могла.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Пусть дед получил репки с весами $1, 4, 7, \ldots, 43$, бабка — с весами $2, 5, 8, \ldots, 44$, а у внучки остались репки с весами $3, 6, 9, \ldots, 45$ (иначе говоря, веса внучкиных репок делятся на 3, веса дедкиных дают остаток 1, а веса бабкиных — остаток 2 при делении на 3). Тогда сумма весов двух репок (бабки и деда) будет делиться на 3, и будет принимать значения от $1 + 2 = 3$ до $43 + 44 = 87 = 29 \cdot 3$. Веса от 3 до 45 внучка может уравновесить одной своей репкой, а веса от $48 = 45 + 3$ до $87 = 45 + 42$ — двумя репками.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример без обоснования — 3 балла.

11 класс

11.1. График функция $y = ax^4$ высекает на прямых $y = 1$, $y = 4$, $y = 9$ три отрезка. Докажите, что из этих отрезков можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение. Поскольку график пересекает прямые, $a > 0$. Заметим, что прямая $y = c$ $(c > 0)$ пересекает данный график в точках, симметричных относительно оси ординат (так как функция четная), поэтому данные в условии отрезки имеют длины $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$, где x_1, x_2, x_3 — положительные корни уравнений $ax^4 = 1$, $ax^4 = 4$, $ax^4 = 9$. Поэтому сумма квадратов длин первых двух отрезков равна $(2x_1)^2 + (2x_2)^2 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{a}}$. Значит, эта сумма равна квадрату длины третьего отрезка. Утверждение доказано.

Комментарий. Обоснование обратной теоремы Пифагора не требуется.

11.2. В последовательности квадратных трехчленов $x^2 + ax + b, x^2 + (a + 1)x + (b + 1), x^2 + (a + 2)x + (b + 2), \ldots$, где a — целое число, некоторые два имеют общий корень. Докажите, что все эти трёхчлены имеют корни, и все эти корни — целые числа.

Решение. Пусть трехчлены $x^2+(a+m)x+(b+m)$ и $x^2+(a+n)x+(b+n)$ имеют общий корень x_0. Тогда $x_0^2+(a+m)x_0+(b+m) = x_0^2+(a+n)x_0+(b+n) = 0$, откуда $(m-n)x_0+(m-n) = 0$. Но $m - n \neq 0$, поэтому $x_0 + 1 = 0$, то есть $x_0 = -1$. Подставляя корень в квадратное уравнение, получаем: $1-(a+m)+(b+m) = 0$, откуда $b = a-1$ (целое число). Значит, данные квадратные уравнения имеют вид: $x^2 + (a + k)x + (a - 1 + k) = 0$. Все такие уравнения имеют целые корни: $x_1 = -1, x_2 = 1 - a - k$.

Комментарий. Доказано, что -1 является общим корнем — 2 балла.

11.3. В основании семиугольной пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_7$ лежит выпуклый семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$. Известно, что проекции вершин A_2, A_4, A_6 на прямую SA_1 попадают в одну точку. Докажите, что проекции вершин A_3, A_5, A_7 также попадают в одну точку.

Решение. Пусть P — точка, в которую попадают проекции вершин A_2, A_4, A_6 на прямую SA_1. Проведем через точку P плоскость α, перпендикулярную прямой SA_1. Точки A_2, A_4, A_6 — это три точки, не лежащие на одной прямой (многоугольник $A_1A_2 \ldots A_7$ — выпуклый), и все они лежат в плоскости α. Значит, плоскость $A_2A_4A_6$ совпадает с плоскостью α, то есть α — это плоскость основания пирамиды. Но тогда проекции всех вершин основания пирамиды попадают в точку P. Утверждение доказано.

Комментарий. В решении не указано то, что точки A_2, A_4, A_6 не лежат на одной прямой — за все решение ставить не более 5 баллов.

11.4. Сумма первых n натуральных чисел, где n — четное число, оканчивается цифрой 8. Какой цифрой может оканчиваться сумма следующих n чисел (например, если $n = 4$, то первая сумма есть $1 + 2 + 3 + 4$, а вторая — $5 + 6 + 7 + 8$)?

Ответ. 2.

Решение. Пусть $n = 2k$, тогда сумма первых n натуральных чисел равна $S = k(2k + 1)$. Сумма следующих n натуральных чисел (от $2k+1$ до $4k$) равна $D = \dfrac{2k(2k + 1 + 4k)}{2} = (6k+1)k$. Последняя цифра чисел S и D зависит только от последней цифры числа k. Найдем, при каких k выражение $S = k(2k+1)$ может заканчиваться на 8. Если k нечетно, то и S нечетно. Если же k оканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8, то S оканчивается соответственно на 0, 0, 6, 8 или 6. Итак, k должно оканчиваться на 6. Значит, сумма D следующих чисел заканчивается на последнюю цифру произведения $(6 \cdot 6 + 1) \cdot 6$, то есть на цифру 2.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Получены формулы для вычисления сумм от 1 до k-го числа и от $(k + 1)$-го до $2k$-го — 2 балла.

Обоснование того, что последняя цифра произведения (суммы) зависит только от последних цифр сомножителей (слагаемых) не требуется.

11.5. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули?

Ответ. Неверно.

Решение. Пусть вначале на доске были написаны числа 1, 8 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Изучим, как меняются разности между вторым и первым числом, а также между третьим и первым числом. Изначально они равны 7 и 8. При вычитании трёх единиц разности не меняются. Если единицы прибавляются к первым двум числам, то первая разность не меняется, а вторая уменьшается на 1. Аналогично, если единицы прибавляются к первому и третьему числам, то первая разность уменьшается на 1, а вторая не меняется. Наконец, при прибавлении к последним числам разности увеличиваются.

Итак, поскольку первая разность уменьшилась на 7, а вторая — на 8, то к первому числу единица прибавлялась не меньше, чем $7 + 8 = 15$ раз. Значит, из него должны были хотя бы 16 раз вычитать единицу, ибо в конце оно стало нулём. Поэтому итоговое количество операций не меньше, чем $15 + 16 = 31$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведен пример тройки чисел 1, 8, 9, но не приведено верное доказательство того, что в этом случае потребуется больше 30 ходов — 2 балла.