Материалы для проведения муниципального этапа

XLII МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2015–2016 учебный год

12 декабря 2015 г.

Долгопрудный, 2015

Сборник содержит материалы для проведения II (муниципального) этапа XLII Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. Задание подготовили члены региональной Методической комиссии по математике в Московской области к.ф.-м.н. Н. Х. Агаханов и к.ф.-м.н. О. К. Подлипский (Московский физико-технический институт (государственный университет)). Авторы задач Н. Х. Агаханов и О. К. Подлипский. Задачи 6.4, 8.3, 11.3 предложил К. В. Чувилин.

Рецензенты: к.ф.-м.н. И. И. Богданов, к.ф.-м.н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет подготовил И. И. Богданов.

Уважаемые коллеги!

В соответствии с регламентом проведения Всероссийской олимпиады школьников по математике, при проверке работ оценивается:

– правильное решение в 7 баллов;
– решение с недочетами — в 5–6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — в 4 балла;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — в 2–3 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — в 1 балл.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Работа выполняется в течение 4 часов, учащимися 5 и 6 классов — 3 часов.

Вопросы по организации проведения олимпиады, ее содержанию и оценке работ участников можно задать 12 декабря 2014 г. с 9.30 до 18.30 по телефону (495) 408–76–66.

Согласно действующему Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, победителями муниципального этапа являются участники, набравшие наибольшее количество баллов. Важно отметить, что победителями и призерами олимпиады в каждой параллели (5–11 классов) могут стать несколько участников — возможно, набравших разное количество баллов.

Внимание! Приведенные решения не являются единственно правильными. Кроме того, оценка за задачу не должна зависеть от длины решения или его рациональности. В то же время, в 0 баллов оценивается «решение» задачи, при котором используется доказываемое утверждение (наиболее часто это встречается в геометрии: например, нужно доказать, что треугольник равносторонний, а решение начинается со слов «Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний…»). Существует ряд задач, в которых ответ выбирается из двух вариантов (например, в задачах с вопросом «Верно ли…», «Может ли…» или «Существует ли…»). В таких задачах только угаданный правильный ответ без объяснений, как правило, оценивается в 0 баллов.

Решение задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения какой-либо величины включает в себя два шага:

1) доказательство того, что эта величина не больше (не меньше) некоторого числа («оценка»);

2) построение примера, показывающего достижимость этого значения («пример»).

В таких задачах, как правило, первый шаг решения оценивается в 4–5 баллов, второй шаг — в 2–3 балла.

Следует учитывать, что школьники, впервые принимающие участие в олимпиаде, особенно учащиеся 5 и 6 классов, не умеют четко записывать объяснения в своих решениях. Поэтому в 5–7 классах нужно оценивать степень понимания решения, а не качество его записи.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Желаем успешной работы!

В 2015–2016 учебном году III (региональный) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (Московская областная математическая олимпиада) будет проведен 5 февраля (1 тур) и 6 февраля (2 тур) 2016 г. для учащихся 9–11 классов. Одновременно для учащихся 8 класса будет проведен региональный этап олимпиады Эйлера. Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, участниками регионального этапа являются:

– победители и призеры регионального этапа олимпиады предыдущего года;

– участники муниципального этапа олимпиады текущего года, набравшие необходимое для участия в региональном этапе количество баллов.

В соответствии с приказом Министерства образования Московской области оба тура региональной олимпиады пройдут на базе МФТИ в г. Долгопрудном и г. Жуковском. Муниципальное образование при сдаче заявки на участие выбирает место проведения (из двух) самостоятельно.

Условия и решения задач

5 класс

5.1. Петя бегает в два раза быстрее Коли и в три раза быстрее Маши. На беговой дорожке стадиона Петя, Коля и Маша стартовали одновременно. Петя добежал до финиша на 12 секунд раньше Коли. А на сколько секунд Петя прибежал раньше Маши?

Ответ. На 24 секунды.

Решение. Раз Коля бегает в два раза медленнее Пети, то на прохождение дистанции он тратит вдвое больше времени. Значит, Коля пробежал дистанцию за 24 секунды, а Петя — за 12 секунд. Тогда Маша пробежала дистанцию за $12 \cdot 3 = 36$ секунд и отстала от Пети на $36 - 12 = 24$ секунды.

Комментарий. Просто ответ без объяснений — 3 балла.

В качестве объяснения засчитывать любой текст, показывающий, что ответ не просто угадан.

5.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 (то есть все числа от 1 до 9, кроме 7) в строку так, чтобы в любой паре соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Замечание. Существуют и другие примеры. Однако в каждом верном примере число 5 стоит с краю, а рядом с ним находится число 1.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

5.3. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на 5 квадратов, среди которых по крайней мере четыре имеют разные размеры?

Ответ. Можно.

Решение. Пример показан на рис. 1.

Комментарий. Любой правильный рисунок (даже без объяснений) — 7 баллов.

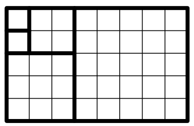


Рис. 1

5.4. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из сидящих сказал: «Оба моих соседа — лжецы». Затем один человек ушел из-за

стола. Могло ли оказаться, что после этого каждый из оставшихся за столом сказал: «Оба моих соседа — рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным).

Ответ. Не мог.

Первое решение. Заметим, что изначально за столом сидело хотя бы 2 рыцаря — иначе нашлись бы 3 лжеца, сидящих рядом, и средний из них сказал бы правду, что невозможно. Так как есть рыцарь, сидящий за столом, то за столом сидят хотя бы два лжеца (рыцарь говорит правду). Поэтому, когда из-за стола кто-то ушел, за столом останется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

Предположим, что после этого все сказали «Оба моих соседа — рыцари». Рассмотрим любого рыцаря, оставшегося за столом. Оба его соседа — рыцари; в частности, справа от него сидит рыцарь. Аналогично, справа от этого второго рыцаря сидит еще один рыцарь, и т. д. Получаем, что все люди за столом — рыцари. Но за столом остался лжец. Противоречие.

Второе решение. Рассмотрим любого человека из оставшихся. Если он рыцарь, то оба его соседа рыцари. Тогда он не мог сказать ранее, что оба его соседа лжецы, так как ушел не более, чем один его сосед. Значит, среди оставшихся все лжецы. Рассмотрим того, у кого сосед не уходил, тогда в начале он сказал правду. Противоречие.

Комментарий. Показано, что за столом было хотя бы два рыцаря — 2 балла.

Показано, что за столом было хотя бы два лжеца — 2 балла.

5.5. На уроке физкультуры учитель для эстафет разбивает всех учеников класса на равные группы, а те ученики, из которых нельзя сформировать полную группу, помогают ему судить эстафету. В классе 30 учеников. Первая эстафета была для групп по 4 ученика (соответственно, двое помогали судить), вторая — по 5 учеников (учитель судил один), третья — по 6, и т. д., последняя — по 13. Могло ли оказаться, что каждый ученик участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи)?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что каждый участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи). Всего прошло 10 эстафет. Это значит, что в качестве судьи каждый ученик участвовал не более одного раза. Посчитаем, сколько учеников участвовало в каждой эстафете в качестве судей. В первой эстафете (для групп по 4 ученика) в качестве судей участвовало 2 ученика. Во 2-й (по 5) — 0 учеников. В 3-й (по 6) — 0 учеников. В 4-й (по 7) — 2 ученика. В 5-й (по 8) — 6 учеников. В 6-й (по 9) — 3 ученика. В 7-й (по 10) — 0 учеников. В 8-й (по 11) — 8 учеников. В 9-й (по 12) — 6 учеников. В 10-й (по 13) — 4 ученика. То есть всего судейство осуществлялось $2+0+0+2+6+3+0+8+6+4 = 31$ раз. Но всего в классе 30 учеников, и если каждый судил не более одного раза, то количество судейств будет также не больше 30. Противоречие.

Замечание. Можно решить задачу и при помощи подсчета количества участий в эстафетах; это суммарное количество оказывается равным $269 < 9 \cdot 30$.

Комментарий. Переход к рассмотрению не участия в эстафетах, а количества участий в судействе — 2 балла.

Если подсчёт количества участий в эстафетах (или в судействе) осуществлен с ошибкой — не более 3 баллов за задачу.

6 класс

6.1. В двузначном числе A поменяли цифры местами и получили число B. Найдите такое A, чтобы сумма $A+B$ делилась на 17.

Ответ. $A = 89$ или $A = 98$.

Решение. Подойдет $A = 89$ или $A = 98$. В обоих случаях $A + B = 187 = 17 \cdot 11$.

Комментарий. Любой из двух правильных ответов — 7 баллов.

6.2. Решите ребус ДОН + ОКА + ЛЕНА + ВОЛГА = АНГАРА или объясните, почему ребус не имеет решения. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).

Ответ. Ребус не имеет решения.

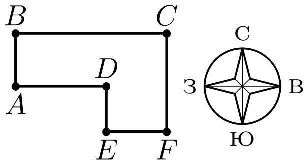
Решение. Рассмотрев последние цифры ребуса, мы получаем, что сумма Н+А+А+А оканчивается на А, значит, Н+А+А оканчивается на 0. Сумма чисел ДОН+ОКА+ЛЕНА+ВОЛГА меньше, чем $999 + 999 + 9999 + 99999 < 1000 + 1000 + 10000 + {}$ ${}+100000 < 120000$. Поскольку эта сумма есть АНГАРА, это означает, что А $= 1$ и Н < 2. Но, так как Н $\neq$ А, получаем, что Н $= 0$. Но тогда Н + А + А $= 2$ — противоречие.

Замечание. Получить противоречие можно и по-другому. Например, сначала можно доказать, что А $= 1$. Потом рассмотреть сложение последних цифр и показать, что Н $= 8$.

Комментарий. Замечено, что буква А равна 1 — 2 балла.

Замечено, что буква Н равна 0 (из рассмотрения начала числа АНГАРА) или 8 (из рассмотрения конца числа АНГАРА) — 2 балла.

6.3. В парке все велосипедные дорожки идут с севера на юг или с запада на восток. Петя и Коля одновременно стартовали из точки A и проехали на велосипедах с постоянными скоростями: Петя — по маршруту A–B–C, Коля — по маршруту A–D–E–F–C (см. рис.), причем оба затратили на дорогу по 12 минут. Известно, что Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети. Сколько времени он ехал по участку DE? На рисунке масштаб не соблюден.



Ответ. 1 минуту.

Решение. Проведем отрезок DH, как показано на рис. 2. Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети, поэтому ему на дорогу по маршруту A–B–C потребовалось бы $12/1{,}2 = 10$ минут. Разность во времени $12 - 10 = 2$ минуты — это время, затраченное на движение по отрезку DE вниз и движение по отрезку FH вверх. Из равенства $DE = FH$ следует, что путь DE Петя преодолеет за 1 минуту.

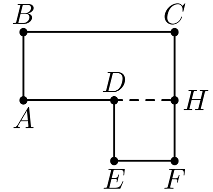


Рис. 2

Комментарий. Правильный ответ при отсутствии обоснований — 2 балла.

6.4. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 2×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. При n, делящихся на 6.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 2x = {}$ ${}= 6x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 2 и на 3. Следовательно, n должно делиться на 2 и на 3, а поэтому и на 6.

Если же n делится на 6, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что прямоугольник 2×3 выкладывается из двух плиток — по одной каждого вида. А квадрат $6k \times 6k$ можно разрезать на прямоугольники 2×3.

Комментарий. Показано, что n делится на 6 — 3 балла.

Показано, что при $n = 6k$ пол можно уложить — 4 балла.

Показано только, что при $n = 6$ пол можно уложить — 1 балл.

Утверждение «Если n^2 делится на 6, то и n делится на 6» можно использовать без доказательства.

6.5. За круглый стол сели 12 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый из них сказал: «Среди моих соседей есть лжец». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть рыцарь»?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что два лжеца не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой лжец не может сказать вторую фразу.

С другой стороны, 3 рыцаря также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-лжец). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть лжец, то есть не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4 \cdot 2 = 8$ человек могли сказать вторую фразу.

Ровно 8 (рыцарей) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: ЛРРЛРРЛРРЛРР.

Замечание. Для того, чтобы рыцарь сказал вторую фразу, он должен сидеть рядом с другим рыцарем. Отсюда несложно получить, что оптимальный пример — единственный (с точностью до поворота стола).

Комментарий. Замечено, что 3 рыцаря не могут сидеть рядом — 1 балл.

Замечено, что 2 лжеца не могут сидеть рядом — 1 балл.

Показано, что число сказавших требуемую фразу не больше 8 — 3 балла.

Приведен пример, показывающий, что ровно 8 из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу — 2 балла.

7 класс

7.1. Существует ли четырехзначное натуральное число с различными ненулевыми цифрами, обладающее следующим свойством: если к нему прибавить это же число, записанное в обратном порядке, то получится число, делящееся на 101?

Ответ. Существует.

Решение. Подойдет, например, число 1234. Действительно, $1234 + 4321 = 5555 = 101 \cdot 55$.

Замечание. Число $\overline{abcd}$ с различными ненулевым цифрами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда $a+d = b+c$.

Комментарий. Любой правильный пример с проверкой того, что он подходит — 7 баллов.

Любой правильный пример без проверки того, что он подходит — 5 балла.

7.2. Имеется 9 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

Ответ. 8.

Решение. Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед — карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно.

Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

Комментарий. Доказательство того, что все карточки разложить не удастся — 4 балла.

Любой правильный пример выкладывания 8 карточек — 3 балла.

7.3. Петя купил одно пирожное, два кекса и три бублика, Аня купила три пирожных и бублик, а Коля купил шесть кексов. Все они заплатили за покупки одинаковые суммы денег. Лена купила два пирожных и два бублика. А сколько кексов она могла бы купить на ту же потраченную ей сумму?

Ответ. 5 кексов.

Решение. Суммарная стоимость покупки Пети и Ани равна стоимости двух покупок Коли. Если обозначить П, К и Б соответственно стоимости пирожного, кекса и бублика, то получаем равенство: $(\text{П}+2\text{К}+3\text{Б})+(3\text{П}+\text{Б}) = 12\text{К}$, откуда следует, что $4\text{П}+4\text{Б} = 10\text{К}$, то есть $2\text{П}+2\text{Б} = 5\text{К}$.

Замечание. Из условия можно вычислить и все отношения стоимостей, именно, $\text{П} : \text{К} : \text{Б} = 7 : 4 : 3$.

Комментарий. Только правильный ответ без объяснений — 1 балл.

7.4. В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

Ответ. Не мог.

Решение. Заметим, что фраза «Я сижу рядом со лжецом» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что в классе лжецов и рыцарей поровну — по 13. Фраза же «Я сижу рядом с рыцарем» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят либо два лжеца, либо два рыцаря. Но 13 — нечетное число, поэтому рассадить 13 лжецов и 13 рыцарей за парты так, чтобы за каждой партой сидели либо два лжеца, либо два рыцаря, не получится.

Комментарий. Замечено, что вначале за каждой партой сидели лжец и рыцарь — 2 балла.

Замечено, что после пересадки рядом должны сидеть два рыцаря или два лжеца — 2 балла.

Сделаны оба этих замечания — 3 балла (а не 4).

7.5. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 6×6 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Покрашенные уголки не должны перекрываться.)

Ответ. 6.

Решение. Пусть клетки квадрата 6×6 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Тогда в каждом квадратике 2×2 покрашено хотя бы 2 клетки, иначе в этом квадратике можно покрасить уголок. Разбивая квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2, получаем, что всего покрашено не меньше $9 \cdot 2 = 18$ клеток. Итак, покрашено не меньше 6 уголков.

На рис. 3 показано, как покрасить 6 уголков, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

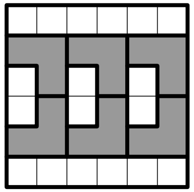


Рис. 3

Комментарий. Доказано, что покрашенных уголков не меньше 6 — 4 балла.

Нарисован пример с 6 покрашенными уголками — 3 балла.

8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре различных натуральных числа, обладающих следующим свойством: если к произведению любых двух из них прибавить произведение двух остальных чисел, то получится простое число.

Решение. Подойдут, например, числа 1, 2, 3 и 5. Действительно, значения всех трех выражений $1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$ и $1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 11$ являются простыми числами.

Замечание. Существуют и другие примеры, такие, как $(1, 2, 3, 13)$, $(2, 5, 11, 17)$ или $(4, 5, 7, 11)$. Нетрудно понять, что в любом таком примере должно быть ровно одно чётное число.

Комментарий. Правильный пример без проверки того, что предъявленный набор чисел подходит — 4 балла.

Любой неверный пример — 0 баллов.

8.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K — середина AB, точка L — середина BC, точка M — середина CD, точка N — середина DA. Для некоторой точки S, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, оказалось, что $KS = LS$ и $NS = MS$. Докажите, что $\angle KSN = \angle MSL$.

Решение. Заметим, что отрезок KN является средней линией треугольника BAD. Значит, $KN = \frac{BD}{2}$. Аналогично, из треугольника BCD получаем $LM = \frac{BD}{2}$. Но тогда треугольники KSN и MSL равны по трем сторонам. Отсюда следует требуемое равенство соответствующих углов.

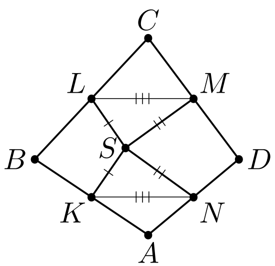


Рис. 4

Замечание. Из условия следует, что диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.

8.3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. При n, делящихся на 7.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 3x = 7x = n^2$. Значит, n должно делиться на 7.

Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис. 5). А квадрат $7k \times 7k$ можно разрезать на квадраты 7×7.

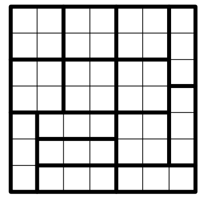


Рис. 5

Комментарий. Показано, что n делится на 7 — 3 балла.

Показано, что при $n = 7k$ пол можно уложить — 4 балла.

8.4. Сумма чисел a, b и c равна нулю, а их произведение отрицательно. Докажите, что число $\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b}$ положительно.

Первое решение. Так как $abc < 0$, то либо одно из чисел a, b, c отрицательно, либо все три. Но $a + b + c = 0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$. Нам нужно доказать, что $\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} > 0$. Или $\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} > -\frac{a^2+b^2}{c} = \frac{a^2+b^2}{a+b}$. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $\frac{b^2+c^2}{a} > \frac{b^2}{a} > \frac{b^2}{a+b}$. Аналогично, $\frac{c^2+a^2}{b} > \frac{a^2}{b} > \frac{a^2}{a+b}$. Сложив два полученных неравенства, получим требуемое.

Второе решение. Перепишем числитель первой дроби в виде $(a+b)^2 - 2ab = (-c)^2 - 2ab = c^2 - 2ab$. Тогда первую дробь можно преобразовать к виду $c - \frac{2ab}{c}$, а сумму дробей — к виду

$$\left(c - \frac{2ab}{c}\right) + \left(a - \frac{2bc}{a}\right) + \left(c - \frac{2ab}{c}\right) =$$
$$= (a+b+c) - 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) = -2abc\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Выражение в скобках положительно, а произведение abc, по условию, отрицательно, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно заметить, что, если c отрицательно, а a

и b положительны, то $|c| = a+b > a$. Поэтому $\dfrac{b^2+c^2}{a} > -\dfrac{b^2+a^2}{c}$; кроме того, $\dfrac{c^2+a^2}{b} > 0$.

8.5. На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася — 1 или 2 монеты, а Толя — тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

Ответ. Не могут.

Решение. Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, …, 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.

Замечание. Существуют и другие выигрышные стратегии Пети.

9 класс

9.1. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них — рыцари, а остальные — лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Оба моих соседа — рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным.)

Ответ. 9.

Решение. Заметим, что все 10 не могли сказать такую фразу. Так как за столом есть и рыцарь, и лжец, то найдутся лжец и рыцарь, сидящие рядом. Но тогда у этого рыцаря не оба соседа рыцари. Если же за столом сидит 9 лжецов и 1 рыцарь, то каждый из этих 9 лжецов мог сказать фразу «Оба моих соседа — рыцари», так как у каждого лжеца среди соседей есть лжец.

Комментарий. Доказано, что все 10 человек не могли сказать требуемую фразу — 4 балла.

Показано, что при некоторой рассадке 9 человек могли сказать требуемую фразу — 3 балла.

9.2. Пусть a и b — произвольные различные числа. Докажите, что уравнение $(x+a)(x+b) = 2x+a+b$ имеет два различных корня.

Первое решение. Перенесем все в левую часть: $(x+a)(x+b) - (2x+a+b) = 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^2+(a+b-2)x+ab-a-b = 0$. Посчитаем дискриминант получившегося квадратного уравнения. Он равен $D = (a+b-2)^2-4(ab-a-b) = a^2+b^2-2ab+4 = (a-b)^2+4 > 0$. Значит, уравнение имеет два различных корня.

Второе решение. Рассмотрим приведенный квадратный трехчлен $f(x) = (x+a)(x+b) - (2x+a+b)$. То есть уравнение из условия эквивалентно $f(x) = 0$. Заметим, что $f(-a) = a-b$ и $f(-b) = b-a$. Так как $a \neq b$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у трехчлена есть ровно два корня.

Комментарий. Доказано, что у уравнения есть хотя бы один корень — 5 баллов.

9.3. Пусть AL — биссектриса остроугольного треугольника ABC, а

ω — описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если $\angle BLA = \angle BAC$, то $BP = CP$.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle BAL$. Тогда $\angle CAL = \alpha$, и, по условию, $\angle BLA = 2\alpha$. Так как $\angle BLA$ — внешний в треугольнике ALC, получаем $\angle ACL = \angle BLA - \angle CAL = \alpha$.

Из прямоугольного треугольника BHC теперь получаем $\angle CBH = 90^\circ - \alpha$. Так как точка P лежит на ω, имеем $\angle BPC = \angle BAC = 2\alpha$. Значит, $\angle PCB = 180^\circ - \angle CBP - \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha = \angle CBP$. Отсюда и следует, что треугольник PBC равнобедренный, $BP = CP$.

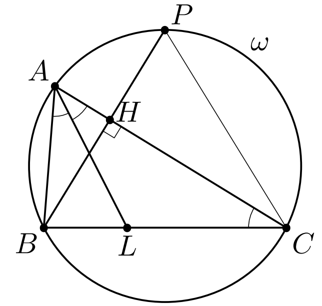


Рис. 6

9.4. Существует ли девятизначное число без нулевых цифр, остатки от деления которого на каждую из его цифр различны?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что требуемое число существует. Тогда у него все цифры различны, поскольку все остатки при делении на них различны. Значит, число состоит из цифр от 1 до 9, каждая использована по одному разу. Поэтому сумма его цифр равна 45. Но тогда оно делится и на 3, и на 9 (а также на 1), то есть имеет одинаковые (нулевые) остатки при делении на эти цифры. Противоречие.

Комментарий. Доказано, что в числе все цифры должны быть различны — 3 балла.

9.5. Назовем *палиндромом* натуральное число, десятичная запись которого одинаково читается как слева направо, так и справа налево (десятичная запись не может начинаться с нуля; например, число 1221 — палиндром, а числа 1231, 1212 и 1010 — нет). Каких палиндромов среди чисел от 10000 до 999999 больше — с нечетной суммой цифр или с четной, и во сколько раз?

Ответ. Палиндромов с четной суммой цифр больше в 3 раза.

Решение. Заметим, что палиндром с 5 цифрами выглядит как $\overline{abcba}$, а с 6 цифрами — как $\overline{abccba}$. Каждый из этих палиндромов однозначно восстанавливается по первым трем цифрам $\overline{abc}$. Это означает, что и палиндромов с 5 цифрами, и палиндромов с 6 цифрами столько же, сколько и чисел $\overline{abc}$ от 100 до 999 (то есть 900).

Заметим, что любой палиндром с 6 цифрами имеет четную сумму цифр $2(a+b+c)$. А сумма цифр палиндрома с 5 цифрами есть $2(a + b) + c$, то есть зависит только от четности цифры c. Значит, при любых фиксированных a и b существует пять (четных) цифр c, для которых $2(a + b) + c$ четно, и пять (нечетных) цифр c, для которых $2(a+b)+c$ нечетно. Поэтому палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, столько же, сколько палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр четна (их по 450). А значит, палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, в 2 раза меньше, чем палиндромов с 6 цифрами. Итак, палиндромов от 10 000 до 999 999 с четной суммой цифр больше, чем с нечётной, причем ровно в 3 раза.

Замечание. Доказать, что палиндромов с четной суммой цифр больше, можно, установив взаимно однозначное соответствие между пятизначными и шестизначными палиндромами. Например, это можно сделать, сопоставив каждому пятизначному палиндрому $\overline{abcba}$ шестизначный палиндром $\overline{abccba}$. При этом у всех шестизначных палиндромов сумма цифр четна, а среди пятизначных есть палиндромы с нечетной суммой цифр.

Комментарий. Доказано, что палиндромов с 5 цифрами столько же, сколько палиндромов с 6 цифрами — 2 балла.

Доказано, что у палиндромов с 6 цифрами сумма цифр четна — 1 балл.

Доказано, что количество палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна, равно количеству палиндромов с 5 цифрами, у которых сумма цифр нечетна — 2 балла.

Доказано, что палиндромов с четной суммой цифр больше, но не найдено, во сколько раз — 1 балл.

В случае решения, использующего взаимно однозначное соответствие, показано, что палиндромов с четной суммой цифр больше — 4 балла.

10 класс

10.1. Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2015$ и $a \neq c$ (сами числа a, b, c, d не даны).

Ответ. 1007,5.

Первое решение. Раскрыв скобки, получим $ab-(a+b)x = cd-(c+d)x$. Подставив $d=2015-a$ и $b=2015-c$, получаем $a(2015-c)-(a+2015-c)x = c(2015-a)-(c+2015-a)x$. Сократив и приведя подобные, получим $(a-c)2015=2(a-c)x$. Учитывая, что $a \neq c$, получаем $2x=2015$, то есть $x=1007{,}5$.

Второе решение. Поскольку $c=2015-b$ и $d=2015-a$, параболы $y=(x-a)(x-b)$ и $y=(x-c)(x-d)$ симметричны относительно прямой $x=2015/2$. Значит, они пересекаются в точке, лежащей на этой прямой. Если бы эти параболы имели еще одну общую точку, то симметричная ей точка также лежала бы на обеих параболах, то есть наше уравнение имело бы как минимум три различных корня. Но тогда бы эти параболы совпадали. А это противоречит условию, так как в этом случае $a=d=2015/2$ и $b=c=2015/2=a$.

Комментарий. Ответ содержит переменные a, b, c или d — 0 баллов.

Показано. что $x=1007{,}5$ является корнем уравнения, но не показано, что других корней нет — 4 балла.

10.2. Вася выбрал некоторое число x и выписал последовательность $a_1=1+x^2+x^3$, $a_2=1+x^3+x^4$, $a_3=1+x^4+x^5$, $\ldots$, $a_n = 1+x^{n+1}+x^{n+2}$, $\ldots$. Оказалось, что $a_2^2=a_1a_3$. Докажите, что для всех $n \geqslant 3$ выполняется равенство $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$.

Решение. Запишем равенство $a_2^2=a_1a_3$. Имеем: $(1+x^3+x^4)^2=(1+x^2+x^3)(1+x^4+x^5)$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^4+x^3=x^5+x^2$. Преобразуем: $0=x^5+x^2-x^4-x^3=x^2(x^3+1-x^2-x)=x^2(x-1)^2(x+1)$. Откуда либо $x=0$, либо $x=-1$, либо $x=1$. В первых двух случаях $a_n=1$ для всех n, в третьем случае $a_n=3$ для всех n. Во всех этих случаях выполняется требуемое равенство $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$.

Замечание. После получения равенства $x^4+x^3=x^5+x^2$ можно действовать и по-другому. Раскрывая скобки в равенстве

$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$ и приводя подобные слагаемые, получаем, что оно равносильно равенству $x^{n+2}+x^{n+1}=x^{n+3}+x^n$, которое получается из $x^4+x^3=x^5+x^2$ домножением на x^{n-2}.

Комментарий. Получено соотношение $x^4+x^3=x^5+x^2$ — 2 балла.

После этого верно разобраны лишь два из трех случаев $x=0$, $x=1$ и $x=-1$ — 2 балла.

10.3. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Закрашенные уголки не должны перекрываться.)

Ответ. 4.

Решение. Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рис. 7. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.

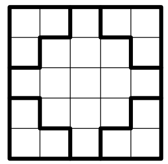


Рис. 7

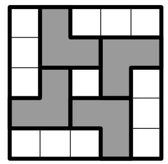


Рис. 8

На рис. 8 показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

Комментарий. Доказано, что покрашенных уголков не меньше 4 — 4 балла.

Нарисован верный пример с 4 покрашенными уголками — 3 балла.

10.4. Назовем число, большее 25, *полупростым*, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

Ответ. 5.

Решение. Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n+1$, $2n+3$ и $2n+5$, бóльших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа $2n-1$, $2n+1$ и $2n+3$ — простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие.

Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, $30 = 17 + 13$, $31 = 29 + 2$, $32 = 19 + 13$, $33 = 31 + 2$, $34 = 23 + 11$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Доказано, что последовательных полупростых чисел (больших 25) не более 5, — 4 балла.

Приведен пример 5 последовательных полупростых чисел (больших 25) — 3 балла.

10.5. Пусть AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, а K, L и M — середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что если $\angle C_1MA_1 = \angle ABC$, то $C_1K = A_1L$.

Решение. Отрезок C_1M является медианой прямоугольного треугольника CC_1A, поэтому $C_1M = \frac{AC}{2} = MA$. Тогда $\angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC$. Аналогично, $\angle A_1MC = \pi - 2\angle BCA$. Отсюда $\angle C_1MA + \angle A_1MC = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$, а тогда $\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC$.

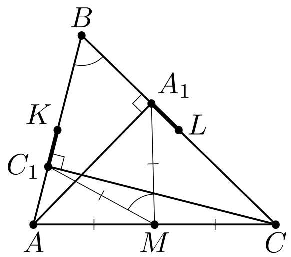


Рис. 9

Из условия следует, что $\angle ABC = \pi - 2\angle ABC$. Отсюда $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. По условию, треугольник ABC — не равнобедренный; пусть, например, $AB < BC$. Тогда из прямоугольного треугольника ABA_1 получаем $BA_1 = BA\cos(\pi/3) = AB/2$. Значит, $A_1L = BL - BA_1 = \frac{BC - AB}{2}$. Аналогично, $KC_1 = BC_1 - BK = \frac{BC - AB}{2} = A_1L$. Утверждение доказано.

Комментарий. Доказано, что $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ — 3 балла.

11 класс

11.1. Существует ли восьмизначное число без нулевых цифр, которое при делении на свою первую цифру дает остаток 1, при делении на вторую цифру дает остаток 2, ..., при делении на восьмую цифру дает остаток 8?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр — различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные.

Далее, если число дает остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра — 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число дает остаток 7 при делении на цифру, эта цифра — 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра — 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) дает остаток 1, а не 3.

Замечание. Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

Комментарий. Доказано, что число должно состоять из различных цифр от 2 до 9 — 3 балла.

Дополнительно показано, что оно может быть только 23456789 — 2 балла.

11.2. Уравнение $(x+a)(x+b)=9$ имеет корень $a+b$. Докажите, что $ab \leqslant 1$.

Решение. Подставив данный корень $x=a+b$ в уравнение, получаем равенство $(a+b+a)(a+b+b)=(2a+b)(2b+a)=9$. Тогда $9=5ab+2(a^2+b^2) \geqslant 5ab+2\cdot 2ab=9ab$, откуда $ab \leqslant 1$. (Мы использовали неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, которое эквивалентно $(a-b)^2 \geqslant 0$.)

Комментарий. В решении применяется неравенство о средних для чисел, знак которых неизвестен, — не более 3 баллов.

11.3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ $(10 < n < 20)$ плитками двух типов: 2×2 и 5×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества

плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

Ответ. 12, 15, 18.

Решение. Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x+5x = 9x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 9, то есть n должно делиться на 3. Таким образом, могут подойти лишь значения $n=12$, $n=15$ и $n=18$.

Покажем, как уложить требуемые квадраты. Квадрат 6×6 можно уложить, использовав поровну плиток обоих типов (см. рис. 10). Так как квадраты 12×12 и 18×18 разрезаются на 6×6, то их также можно уложить требуемым образом.

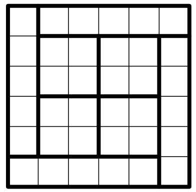


Рис. 10

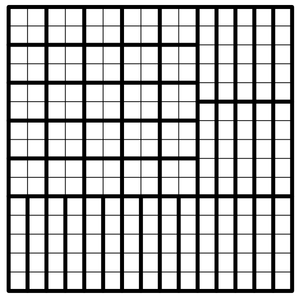


Рис. 11

На рис. 11 показано, как уложить квадрат 15×15, используя по 25 плиток каждого типа.

Замечание 1. Квадрат 18×18 можно разбить на прямоугольники 2×9, каждый из которых можно уложить, используя по 2 плитки каждого типа.

Замечание 2. Можно показать, что любой квадрат $3m \times 3m$ $(m > 3)$ можно требуемым образом уложить плиткой.

Комментарий. Показано, что n^2 делится на 9 и сделан неверный вывод, что n делится на 9 — 0 баллов.

Показано, что n делится на 3 — 2 балла.

Показано, что при $n=12$ пол можно уложить — 2 балла.

Показано, что при $n=15$ пол можно уложить — 2 балла.

Показано, что при $n=18$ пол можно уложить — 1 балл.

11.4. Середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$ равноудалена от всех вершин пирамиды. Пусть SH — высота пирамиды. Докажите, что $BA^2 + BH^2 = CA^2 + CH^2$.

Первое решение. Пусть M — середина ребра SA. Так как $MA = MS = MC$, то в треугольнике ASC медиана MC в два раза больше стороны AS, к которой она проведена. Значит, треугольник ASC — прямоугольный с гипотенузой AS. Аналогично, треугольник ASB — прямоугольный с гипотенузой AS. Поэтому $AS^2 = BA^2 + SB^2 = CA^2 + SC^2$. Но $SC^2 = CH^2 + SH^2$ и $SB^2 = BH^2 + SH^2$. Подставив в предыдущее равенство, получим $BA^2 + BH^2 + SH^2 = CA^2 + CH^2 + SH^2$. Вычтя из обеих частей равенства SH^2, получим требуемое.

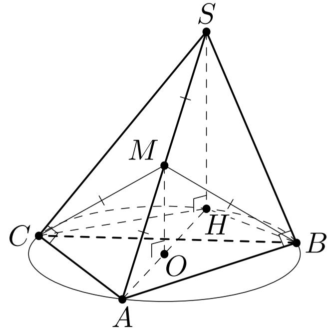


Рис. 12

Второе решение. Пусть M — середина ребра SA, а точка O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. Тогда MO — средняя линия треугольника SAH, поэтому точка O — середина отрезка AH. Из равенства прямоугольных треугольников AMO, BMO и CMO с общим катетом OM и равными, по условию, гипотенузами AM, BM и CM, получаем, что $OA = OB = OC$. Значит, точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC, а тогда AH — диаметр этой окружности. Значит, углы ABH и ACH — прямые. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABH и ACH, получаем утверждение задачи.

Замечание. Другое доказательство того, что $\angle ABS = \angle ACS = 90^\circ$, основано на том, что точка M является центром сферы, описанной около пирамиды, а тогда отрезок SA — диаметр этой сферы.

Комментарий. Доказано, что хотя бы один из углов $\angle ABS$, $\angle ACS$, $\angle ABH$ или $\angle ACH$ прямой — 2 балла.

11.5. Существуют ли натуральные a и b, большие тысячи, такие, что для любого c, являющегося точным квадратом, три числа a, b и c не являются длинами сторон треугольника?

Ответ. Существуют.

Решение. Пусть, например, $a = 10000^2 + 10000$, $b = 1001$. Предположим, что существует $c = d^2$ такое, что числа a, b и c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$. Рассмотрим первые два из них: $a + b > c$ и $c > a - b$. Заметим, что $a + b = 10000^2 + 10000 + 1001 < 10000^2 + 10000 + 10000 + 1 = 10001^2$, и $a - b = 10000^2 + 10000 - 1001 > 10000^2$. Но тогда $10001^2 > a + b > c > a - b > 10000^2$, то есть $10001^2 > d^2 > 10000^2$. Это невозможно.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Только ответ без объяснений — 0 баллов.

Предъявлены два числа, но нет проверки того, что они удовлетворяют требованиям задачи — 0 баллов.